Edição de Fevereiro de 2008

Nota do Autor: A qualificação do profissional passa pela necessidade dos conhecimentos que possam lhe transmitir segurança nas decisões financeiras. Seja este profissional da área de gerência, supervisão ou vendas, precisa conhecer os fundamentos de Análise Financeira para que possa maximizar resultados, minimizar custos e escolher corretamente o rumo a ser seguido. Desta forma poderá agregar ao seu produto o diferencial mercadológico do custo financeiro calculado adequadamente. Assim, buscamos neste compêndio proporcionar técnicas a quem necessite efetuar análise, buscar respostas e solução imediata em assuntos que envolvam decisão em Análise Financeira, utilizando metodologia moderna e os recursos do teclado financeiro da Calculadora ***hp12C***. Utilizamos a seguinte metodologia no conteúdo:

METODOLOGIA

- Exposição matemática dos conceitos fundamentais da Matemática Financeira.
- Aplicação da Calculadora ***hp*12C** na solução de problemas e análise de eventos financeiros.
- Exercícios práticos para o entendimento e fixação do conteúdo.
- Recursos visuais com tabelas e gráficos com cores fortes e contrastantes para marcar o conteúdo.
- De forma nenhuma induziremos a prática de decorar fórmulas. Motivaremos para a compreensão do fato financeiro para representá-lo matematicamente da forma correta. E partindo deste princípio, também facilitaremos a compreensão das teclas financeiras da calculadora financeira ***hp*12C.**

PROGRAMA DO CURSO

- Conhecendo o teclado da *hp*12C;
- Funções de Porcentagem, Calendário, Pilha Operacional e Memória da *hp*12c.
- O Diagrama do Fluxo de Caixa;
- Taxa, Prazo e Valor Médios;
- Juros Simples comerciais, exatos e bancários.
- Juros Compostos;
- Taxas de juros nominais, efetivas e equivalentes;
- Descontos Simples ou Bancário;
- Desconto Racional;
- Juros, Taxa e Capital médios;
- Taxa Efetiva e Equivalência de Capitais para o Desconto Simples;
- Convenção Linear e Exponencial na calculadora *hp*12C;
- Desconto Composto Bancário e Racional;
- Capitalização e Descapitalização;
- Sistema PRICE de financiamento com e sem entrada;
- Valor médio e Desvio Padrão na calculadora *hp*12C
- Séries financeiras com parcelas intermediárias;
- Analise de investimentos com parcelas de retorno não constantes através da taxa interna de retorno e valor presente líquido.
- Análise de Fluxos de Caixa com calculadora *hp*12C.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Conceituamos Matemática Financeira como a Ciência de exprimir numericamente a relação entre o capital, o juro e o tempo decorrido agregado nas suas mais diferentes combinações possíveis.

- **Juros (J):** é a remuneração do dinheiro ajustada entre o tomador e o fornecedor.
- **Capital (C):** é a representação da moeda circulante.
- **Taxa de juros (i):** é a representação do fator de remuneração do capital. Como utilizamos o sistema numérico de base 10, as grandezas efetuadas através de razões com o denominador 100 (razões centesimais) aparecem como a principal representação na esfera comercial. Assim, quando dizemos [3%] na verdade estamos nos referindo a [3/100]. Ou seja, o fator [1/100] é simbolizado por [%]. Desta forma, em matemática financeira, definimos o que exprimimos através do símbolo [%] como taxa percentual e o valor centesimal [1/100] como taxa unitária. Observe a tabela seguinte.

TAXA PERCENTUAL	RAZÃO CENTESIMAL	TAXA UNITÁRIA
30%	30/100	0,30
25%	25/100	0,25
45%	45/100	0,45
75%	75/100	0,75
125%	125/100	1,25

- **Tempo (t):** é o período em que ocorre a relação entre os fatores financeiros acima.

Organizando sob a forma matemática os conceitos acima, teremos:

$$J = C.i.t$$

- **Montante (M):** é o valor acumulado dos juros e do capital, logo:

$$M = C + J = C + C.i.t = C(1 + i.t)$$

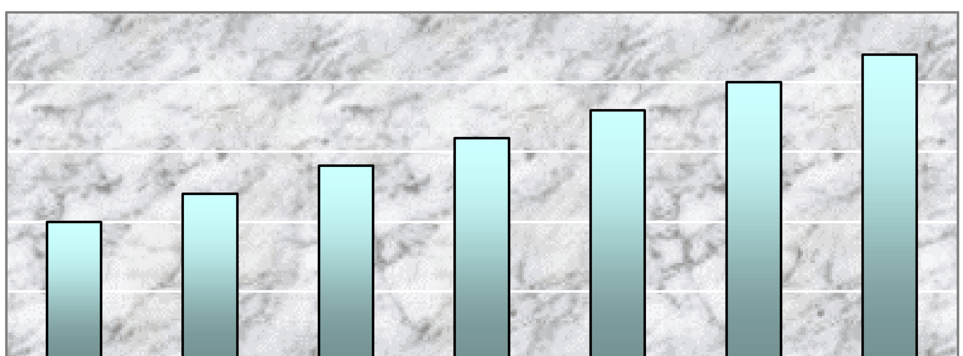
CÁLCULO DOS JUROS SIMPLES

No conceito de juros simples, o resultado é sempre obtido sobre o valor principal, sem incorporação ao capital para efeito de cálculo dos juros de um período sobre o período seguinte. Vamos tomar o seguinte exemplo:

Exemplo: Capital de R$10.000,00, juros de 2% ao mês, e prazo de 6 meses. De uma maneira prática, podemos montar a seguinte tabela efetuando os cálculos *"de cabeça"* sem nos preocuparmos com a *"aritmética"* dos cálculos.

Capital [C]	Prazo [t]	Taxa de Juros [i]	Juros	Montante M=C+J
10.000,00	1 mês	2%x1=2%	200,00	10.200,00
	2 meses	2%x2=4%	400,00	10.400,00
	3 meses	2%x3=6%	600,00	10.600,00
	4 meses	2%x4=8%	800,00	10.800,00
	5 meses	2%x5=10%	1.000,00	11.000,00
	6 meses	2%x6=12%	1.200,00	11.200,00

Na figura seguinte, observe a representação da evolução dos Juros Simples



	Início	1 mês	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses
VALOR	10.000,00	10.200,00	10.400,00	10.600,00	10.800,00	11.000,00	11.200,00

Observe que a evolução dos valores é linear, ou seja, sofre acréscimos periódicos iguais. E para efetuarmos os cálculos de forma aritmética, teremos que definir se o prazo será em dia, mês ou ano para que a taxa seja adequada. Na tabela acima, consideramos o prazo como mensal. Porém, dentro do conceito dos Juros Simples, existem três formas de efetuar os cálculos, em relação ao prazo. Acompanhe os cálculos para cada situação seguinte considerando os dados do exemplo.

Juros ordinários: consideram-se todos os meses com 30 dias, e consequentemente o ano com 360 dias. Logo, a taxa de Juros anual será de 24%.

$$M = C + J = C(1 + i.t)$$

$$M(30dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{30}{360}) = 10.200,00$$

$$M(60dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{60}{360}) = 10.400,00$$

$$M(90dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{90}{360}) = 10.600,00$$

$$M(120dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{120}{360}) = 10.800,00$$

$$M(150dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{150}{360}) = 11.000,00$$

$$M(180dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{180}{360}) = 11.200,00$$

Juros exatos: consideram-se os meses conforme o calendário civil, e o ano com 365 dias. Vamos considerar que o período de 6 meses ocorra de 01/07 a 31/12. Logo, a taxa de juros anual será de 24%.

$$M = C + J = C(1 + i.t)$$

$$M(31dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{31}{365}) = 10.203,84$$

$$M(62dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{62}{365}) = 10.407,67$$

$$M(92dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{92}{365}) = 10.604,93$$

$$M(123dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{123}{365}) = 10.808,77$$

$$M(153dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{153}{365}) = 11.006,03$$

$$M(184dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{184}{365}) = 11.209,86$$

Juros conforme o sistema bancário: Considera-se o ano comercial de 360 dias e os meses conforme o calendário civil. Vamos considerar que o período de 6 meses ocorra de 01/07 a 31/12. Logo, a taxa de juros anual será de 24%.

$$M = C + J = C(1 + i.t)$$

$$M(31dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{31}{360}) = 10.206,67$$

$$M(62dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{62}{360}) = 10.413,33$$

$$M(92dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{92}{360}) = 10.613,33$$

$$M(123dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{123}{360}) = 10.820,00$$

$$M(153dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{153}{360}) = 11.020,00$$

$$M(184dias) = 10.000,00(1 + \frac{24}{100} x \frac{184}{360}) = 11.226,67$$

Na tabela abaixo, comparamos os resultados obtidos nas três modalidades:

Ordinários	*Exatos*	*Bancários*
10.200,00	**10.203,84**	**10.206,67**
10.400,00	**10.407,67**	**10.413,33**
10.600,00	**10.604,93**	**10.613,33**
10.800,00	**10.808,77**	**10.820,00**
11.000,00	**11.006,03**	**11.020,00**
11.200,00	**11.209,86**	**11.226,67**

IMPORTANTE: No Sistema Financeiro e Comercial, costuma-se utilizar os Juros calculados conforme o Sistema Bancário, correntemente conhecido como "Juros Bancários".

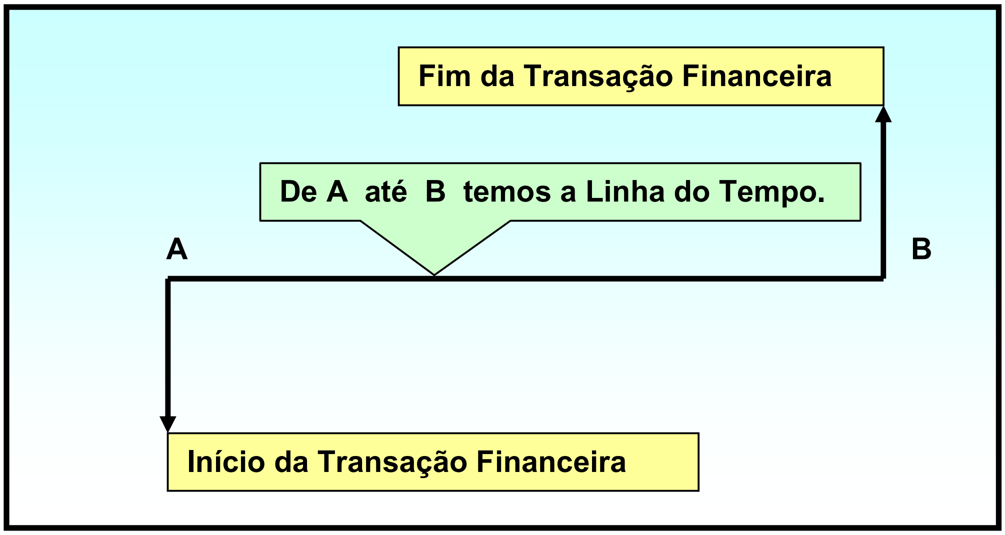
TAXA NOMINAL, EQUIVALENTE E PROPORCIONAL EM JUROS SIMPLES

Como não existe capitalização, estas taxas acabam sendo as mesmas. O importante é trabalharmos com o regime de tempo adequado, conforme vimos no exemplo anterior. Desta forma, teremos para uma taxa de 24% a.a.:

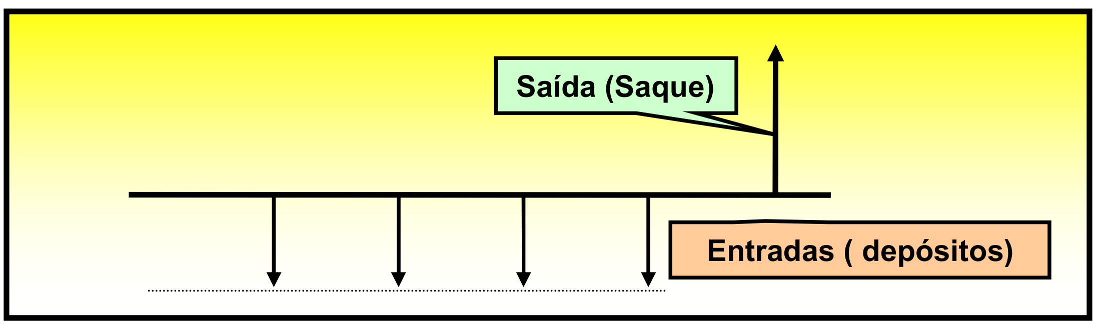
TAXA NOMINAL ANUAL	24%
Taxa equivalente/proporcional para 3 meses	6%
Taxa equivalente/proporcional para 6 meses	12%
Taxa equivalente /proporcional para 12 meses	24%
Taxa equivalente/proporcional para 18 meses	36%

UTILIZANDO O DIAGRAMA DO FLUXO DE CAIXA

A representação gráfica do fluxo de caixa facilita o entendimento e a aplicação das funções financeiras, e são fundamentais nos cálculos financeiros utilizados na ***hp12c***. Observe a figura seguinte:

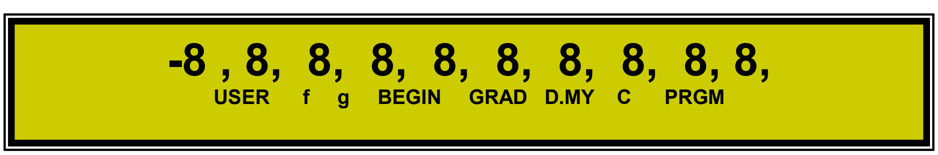


O Fluxo Financeiro (entradas e saídas) são representados por flechas verticais fixadas em uma linha horizontal que representa o tempo (ou períodos) em que ocorre (Linha do Tempo). As entradas e saídas devem ter sentidos diferentes, não importando se estão no início ou no fim da transação financeira. Observe o exemplo seguinte.



TESTE da *hp*12C

Desligue a calculadora, pressione a tecla **[on]** e em seguida a tecla **[x]**. Mantendo-as pressionadas, libere **[on]** e após **[x]**. Deveremos ter no visor os seguintes caracteres:



UTILIZAÇÃO DO TECLADO DA HP12C.

✓ Cada tecla pode ter até três funções, acionadas da seguinte forma:

1. Uma função acessada diretamente com caracteres brancos na parte superior das teclas.
2. Uma função acessada através da tecla de prefixo **[f]** em caracteres dourados localizados na base do teclado.
3. Uma função acessada através da tecla de prefixo **[g]** em caracteres azuis localizados na face oblíqua do teclado.

✓ Para determinarmos a calculadora trabalhar no formato decimal brasileiro **(X,YY)** onde **X** são números inteiros e **YY** a parte decimal, devemos desligar a calculadora, pressionar as teclas **[on][.]**, liberar **[on**] e após **[.]**. Obs. **[.]=[ponto]**

✓ Para determinarmos o número de decimais, devemos usar a tecla [f] seguida do número desejado .Por exemplo, para termos **(0,00) no visor** devemos digitar **f[2]**.

✓ Para que tenhamos cálculos com juros compostos em períodos singulares**(>1),** devemos digitar **[STO][EEX]**. Teremos a letra "**c**" no visor. Em capítulo específico, trataremos do assunto.

✓ As teclas que aparecem abaixo da chave "CLEAR" "zeram" os registros da calculadora, da seguinte forma:

f[∑] - ESTATÍSTICOS
f[PRGM] – PROGRAMAS
f[FIN] - FINANCEIROS
f[REG] - PILHA OPERACIONAL
[CLX] – VISOR

O conhecimento prévio das funções das teclas é fundamental para uma eficiente utilização da calculadora. Durante o curso, introduziremos de forma adequada os conceitos através de exemplos. No entanto, é importante o conhecimento prévio de algumas teclas que são freqüentemente utilizadas em todos os cálculos e propiciam uma excelente capacidade operacional. Veja o resumo na tabela abaixo.

TECLA	COMENTÁRIOS
[STO]	Storage – armazena dados .
[RCL]	Recall – recupera dados armazenados.
[R↓]	Rolls down – altera a posição da pilha operacional.
[CHS]	Change Signal – muda o sinal do número no visor.

FUNÇÃO PORCENTAGEM com a *hp12C*

Na calculadora ***hp12c,*** temos que observar que a adequada impostação dos dados determina a correta leitura do resultado. Desta forma, fica fácil entendermos as seguintes funções.

- **%T** Calcula o valor percentual de um número em relação a outro.

Exemplo: Calcule a porcentagem que 90 unidades representam em relação à 100 unidades:

f[REG]	100 [↑]	90	[%T]	90
Zera registros	Imposta o nº	Imposta o nº	Imposta a função	Resultado=90%

- **Δ%** Calcula a variação proporcional entre dois números.

Exemplo: Calcule a variação proporcional entre 90 e 100 unidades.

f[REG]	90 [↑]	100	[Δ%]	11,11
Zera registros	Imposta o nº	Imposta o nº	Imposta a função	Resultado=11,11%

- **%** Calcula o resultado obtido através da aplicação de uma taxa de porcentagem .

Exemplo: Calcule a quantidade que 90 porcento representa em relação a 100 unidades.

f[REG]	100 [↑]	90	[%]	90
Zera registros	Imposta o nº	Imposta o nº	Imposta a função	Resultado=90

FUNÇÃO CALENDÁRIO COM A *hp12c*

Curiosidade : O calendário da HP12c começa em 15.10.1582 e termina em 25.11.4046

Forma de impostação dos dados

- Sempre no formato **DD.MMAAAA** (Dia/Mês/Ano).
- A calculadora deve estar no formato **D.MY (dia, mês e ano)** no visor.

DATE: Informa a data que estamos procurando, entre uma data informada e o número de dias. Exemplo: Considerando a data de 30.06.01, em que data cairá 60 dias após?

30.062001	[↑]	60	[g]	DATE	29.08.2001	3 (quarta-feira)

O número à direita do visor significa o dia da semana, começando Segunda-feira pelo 1 e terminando no Domingo pelo 7.No nosso exemplo, trata-se de uma quarta-feira.

ΔDYS : Informa o número de dias que estamos procurando entre duas datas.
Exemplo: Considerando a data de 30.06.2002, quantos dias faltam para o Natal?

30.062002	[↑]	25.122002	[g]	ΔDYS	178 (dias)

CÁLCULOS ARITMÉTICOS EM CADEIA com a *hp12C*

Como você já deve ter observado, não existe o sinal de igual (=) na ***hp*12c** . E os cálculos são efetuados usando-se o recurso da Pilha Operacional, um sistema de armazenamento de dados que elimina a necessidade de parênteses ou chaves para a execução dos cálculos. Acompanhe o seguinte exemplo:

$$(4+\frac{3}{5})x8-(5-\frac{2}{3})=32{,}47$$

X	Função	Visor	Y	Z	T	Comentários
4	[↑]	4,00	4			Introduz o 4 e armazena em Y
3	[↑]	3,00	3	4		Introduz e armazena o 3 em Y e desloca o 4 para Z
5	[÷]	0,60	4			Divide 3 por 5 e desloca 4 para Y.
	[+]	4,60				Soma o que esta no visor X(0,60) com o conteúdo de Y (4).
8	[X]	36,80				Multiplica 8 pelo conteúdo do visor X anterior (4,60)
5	[↑]	5,00	5	36,80		Introduz 5 e desloca 36,80 para Z
2	[↑]	2,00	2	5	36,80	Introduz e armazena o 2 em Y, desloca o 5 para Z e 36,80 para T.
3	[÷]	0,67	5	36,80		Divide 2 por 3 e desloca 5 para Y e 36,80 para Z.
	[-]	4,33	36,80			Subtrai 0,67 de 5, obtendo 4,33
	[-]	32,47				Subtrai 4,33 de 36,80 obtendo 32,47

Observe que toda vez que utilizamos a tecla **[↑],** armazenamos um número. Este é o conceito da Pilha Operacional. Considere que **Y**, **Z** e **T** sejam "visores auxiliares". Desta forma, podemos deixar armazenados números "*em espera*" neles, o que possibilita efetuar operações aritméticas em cadeia. Apenas é digitado na calculadora o que esta na coluna **X.**

ATIVIDADE

$$(\frac{5}{8}-\frac{3}{4})x4+(1-\frac{9}{10})-\frac{6}{10}=-1$$

Sugestão : use lápis e borracha.

X	Função	Visor	Y	Z	T	Comentários

JUROS SIMPLES COM A CALCULADORA *HP12c*

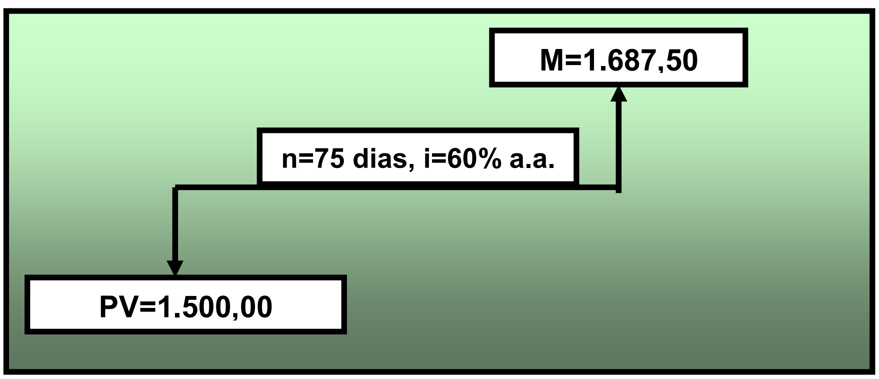
Para efetuarmos cálculos com juros simples, devemos considerar as variáveis da seguinte forma, em relação as teclas financeiras:

TECLA	FUNÇÃO
[n]	Quantidade de dias, sendo o ano comercial 360 dias
[i]	Taxa de Juros correspondente ao ano comercial
[PV]	Valor do capital considerado

Exemplo: Calcule o valor dos juros simples para 75 dias considerando uma taxa de juros anual de 60 %, sobre o valor de R$ 1.500,00. Acompanhe a impostação dos dados na sua calculadora utilizando a seguinte tabela.

[f] [REG]	1.500,00	[CHS][PV]	[60] [i]	75 [n]	[f] [INT]	187,50
Limpa os registros	Imposta o capital	Muda o sinal	Imposta a taxa anual	Imposta os dias	Calcula os juros	Valor dos juros

- **Ao acionarmos a tecla [+], teremos o montante M no valor de R$1.687,50.**
- **Ao acionarmos a tecla [R↓], teremos o valor de R$ 184,93 correspondente aos juros exatos.**



Vamos agora efetuar os cálculos do Exemplo da seção Juros Simples utilizando a calculadora ***hp*12C*.*** Observe que o como o capital e a taxa de juros anual não se alteram, serão impostados apenas no início da operação.

	PRAZO (Em dias)	f(INT) Calcula os Juros	Tecla [+] Calcula o Montante
CAPITAL 10.000,00[CHS][PV] TAXA DE JUROS 24[i]	31[n]	206,67	10.206,67
	62[n]	413,33	10.413,33
	92[n]	613,33	10.613,33
	123[n]	820,00	10.820,00
	153[n]	1.020,00	11.020,00
	184[n]	1.226,67	11.226,67

DESCONTO RACIONAL

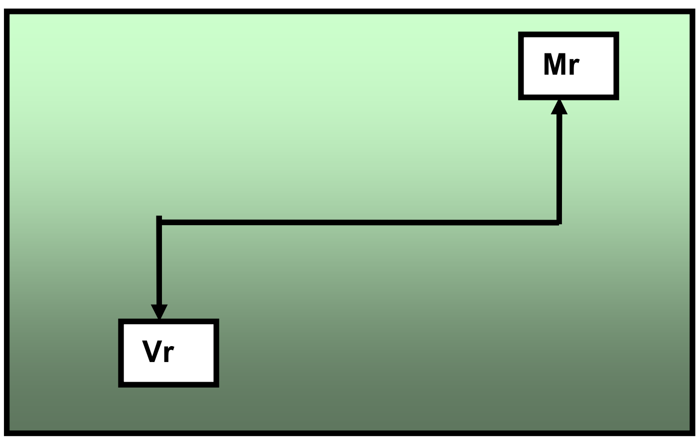
Trata-se do valor do desconto aplicado sobre o valor presente do título calculado através da taxa nominal, por isto denominado de Desconto Simples por Dentro. Desta forma, é a operação inversa dos Juros Simples. Embora este sistema não seja utilizado na prática, seu estudo é interessante para complementar o estudo das taxas de juros efetivas e nominais. Considerando que:

- **Vr** é o valor de resgate do título.
- **i** é a taxa de juros efetiva da operação.
- **t** é o prazo da operação.

✓ Consideremos que o valor de Desconto Racional é aplicado sobre o Valor Racional.

$$D_r = V_r.i.t$$

✓ Representando graficamente, teremos:



✓ O montante é calculado somando-se o valor do desconto ao capital, ou seja:

$$M_r = V_r + D_r = V_r + V_r.i.t = V_r(1 + i.t)$$

$$\text{Isolando} \quad V_r \rightarrow V_r = \frac{M_r}{(1 + i.t)}$$

Exemplo: Calcule o valor do desconto racional para uma duplicata de R$5.000,00 vencível no dia 31/12 e que desejamos quitar no dia 01/10. A taxa de juros informada é de 30% a.a.

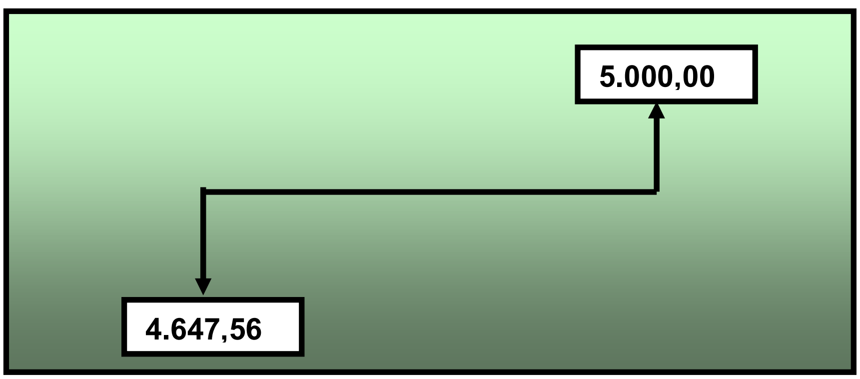
Solução:

$$[f][CLX]01.102008 \uparrow 31.122008\ [g][\Delta DYs] \Rightarrow 91$$

$$V_r = \frac{M_r}{(1+it)} = \frac{5.000{,}00}{1+\frac{30}{100} x \frac{91}{360}} = 4.647{,}56$$

Utilizando a calculadora ***hp12c***

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
5.000,00 [FV]	5.000,00	Imposta o Montante racional
30↑360÷91x[i]	7,58	Calcula a taxa racional (efetiva)
1[n]	1	Imposta o valor unitário para a taxa racional
[PV][CHS]	4.647,56	Calcula o Valor Racional



TAXA DE JUROS NOMINAIS E EFETIVOS PARA DESCONTO RACIONAL

Na situação do desconto racional, a taxa nominal é igual a taxa efetiva. É muito fácil entendemos se tomarmos o exemplo anterior. Enquanto a taxa aplicada (nominal) foi de:

$$i_n = \frac{30}{100} x \frac{91}{360} x100 = 7{,}5833\%$$

Podemos facilmente verificar que esta mesma taxa aplicada sobre R$ 4.647,56 resultaria no valor de R$ 5.000,00, ou seja:

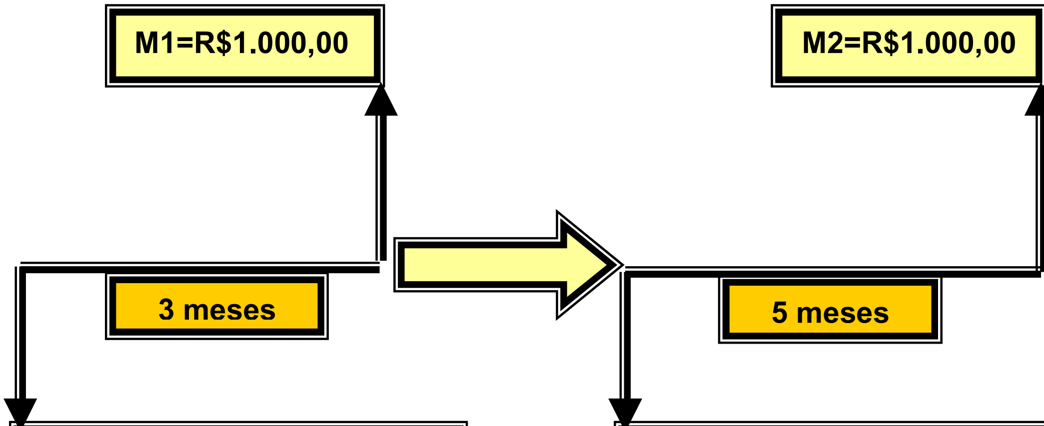
$$4.647{,}56 + (4.647{,}56x \frac{7{,}5833}{100}) = 5.000{,}00$$

EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS PARA O DESCONTO RACIONAL.

No desconto racional simplesmente partimos da taxa de juros anual e mantemos o valor do **Mr**, pelo fato da taxa efetiva do desconto racional ser a mesma taxa nominal.

Exemplo 1: Qual valor do título com prazo de 5 meses que poderá substituir outro no valor de R$1.000,00 , i=2,5% a.m. e prazo de 3 meses?

Solução: Inicialmente calculamos o valor do desconto racional do título original, e então o valor do desconto racional do novo título.



$$Vr1 = \frac{1.000,00}{1+\frac{2,5}{100}x3} = 930,23$$

$$Vr2 = \frac{1.000,00}{1+\frac{2,5}{100}x5} = 888,89$$

$$Aplicando\ (2,5\%)\ sobre\ 930,23 \Rightarrow \left(930,23 + 930,23\,x\,3\,x\,\frac{2,5}{100}\right) = 1.000,00$$

$$Aplicando\ (2,5\%)\ sobre\ 888,89 \Rightarrow \left(888,89 + 888,89\,x\,5\,x\,\frac{2,5}{100}\right) = 1.000,00$$

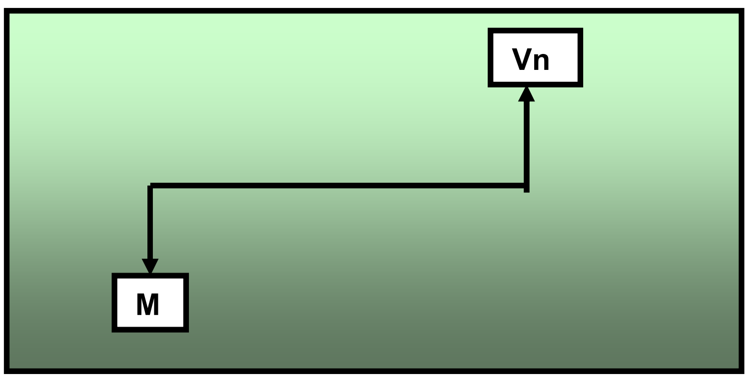
TECLA	*VISOR*	*COMENTÁRIO*
1.000,00 [FV]	**1.000,00**	**Imposta o Montante racional**
2,5[↑]3x[i]	**7,50**	**Calcula a taxa racional (efetiva)**
1[n]	**1**	**Imposta o valor unitário para a taxa racional**
[PV][CHS]	**930,23**	**Calcula o Valor Racional**
RCL[i]	**7,50**	**Recupera a taxa racional**
[%] [+]	**1.000,00**	**Retorna ao Montante Racional**
1.000,00 [FV]	**1.000,00**	**Imposta o Montante racional**
2,5[↑]5x[i]	**12,50**	**Calcula a taxa racional (efetiva)**
1[n]	**1**	**Imposta o valor unitário para a taxa racional**
[PV][CHS]	**888,89**	**Calcula o Valor Racional**
RCL[i]	**12,50**	**Recupera a taxa racional**
[%] [+]	**1.000,00**	**Retorna ao Montante Racional**

DESCONTO SIMPLES BANCÁRIO

Trata-se da diferença entre o valor nominal de um título e o seu valor no momento da negociação, ou o abatimento efetuado sobre um valor previamente determinado para o resgate. Estas operações financeiras são muito utilizadas no mundo dos negócios, principalmente em operações bancárias, e também são conhecidas por Desconto Simples por Fora, por tratar-se do valor a ser deduzido de um título calculado sobre o seu Valor Nominal, onde:

- **Vn** é o valor nominal do título.
- **i** é a taxa de juros nominal da operação.
- **t** é o prazo da operação

Observe o diagrama do fluxo de caixa



- ✓ Efetuamos o cálculo do valor do desconto calculado sobre o Valor Nominal do título.

$$Ds = Vn.i.t$$

- ✓ **M** é o montante, valor atual ou valor de resgate, e é calculado diminuindo-se o valor do desconto do valor do título, ou seja:

$$M = Vn - Ds = Vn - Vn.i.t = Vn(1 - i.t)$$

Exemplo 1: Calcule o valor do Montante para uma duplicata de R$5.000,00, vencível no dia 31.12 e que desejamos quitar no dia 01.10. A taxa de juros informada é de 30% a.a.

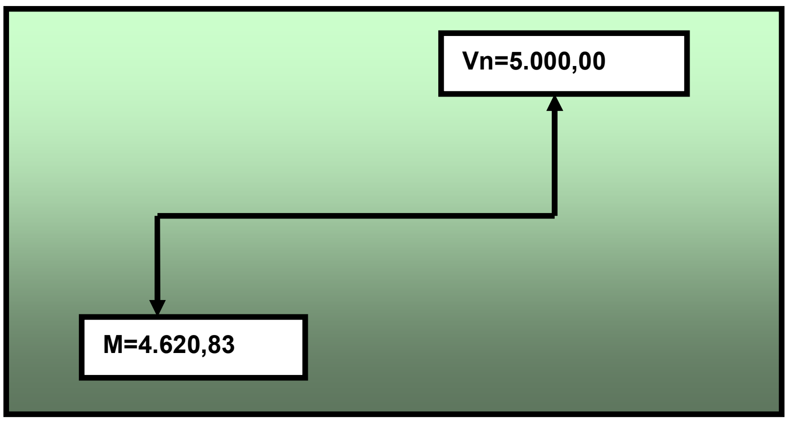
Solução:

$$[f][CLX]01.102008 \uparrow 31.122008\ [g][\Delta DYs] \Rightarrow 91$$

$$M = Vn(1 - i.t) = 5.000,00(1 - \frac{30}{100} x \frac{91}{360}) = 4.620,83$$

$$hp12c \rightarrow 5.000,00 \uparrow 1 \uparrow 30 \uparrow 100 \div 91x360 \div - x \rightarrow 4.620,83$$

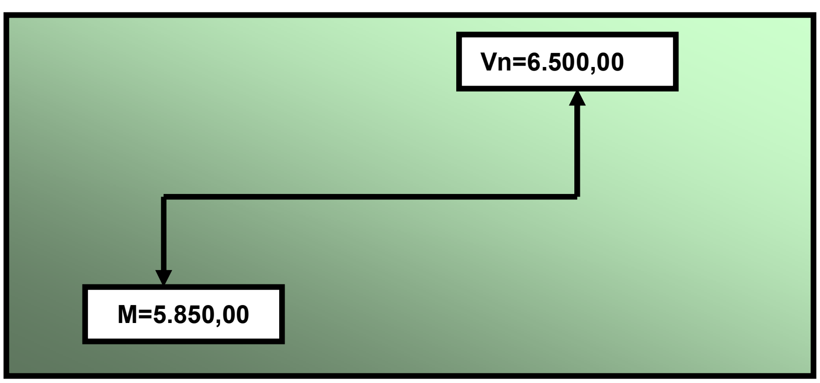
Observe o diagrama do fluxo de caixa da operação.



Exemplo 2: Vamos calcular o valor do desconto para uma duplicata de R$6.500,00 que desejamos quitar com 60 dias de antecedência. A taxa de juros informada é de 5 % am.

$$M = Vn(1 - i.t) = 6.500,00(1 - \frac{5x12}{100} x \frac{60}{360}) = 5.850,00$$

Observe o diagrama do fluxo de caixa da operação.



Calcule com a ***hp12c.*** Observe o exemplo anterior.

hp12c→

TAXA DE JUROS NOMINAIS E EFETIVOS PARA O DESCONTO BANCÁRIO

Na situação do desconto, a taxa nominal é diferente da taxa efetiva. É muito fácil entendermos se tomarmos o Exemplo 1 anterior. Enquanto a taxa aplicada (nominal) foi de:

$$i(\%) = \left(\frac{30}{100} \text{x} \frac{91}{360}\right)\text{x}100 = 7{,}58\%$$

$$\text{hp12c} \rightarrow 30 \uparrow 100 \div 91\text{x}360 \div 100\text{x} \rightarrow 7{,}58\ \%$$

Podemos facilmente verificar que esta mesma taxa aplicada sobre R$ 4.620,83 resultaria menos do que R$ 5.000,00, ou seja:

$$4.620{,}83 + \left(4.620{,}83\text{x} \frac{7{,}58}{100}\right) \Rightarrow 4.971{,}09$$

$$\text{hp12c} \rightarrow 4.620{,}83 \uparrow 7{,}58[\%] + \rightarrow 4.971{,}09$$

No entanto, se calcularmos a variação proporcional entre o valor nominal e o montante:

$$\Delta(\%) = \frac{\text{Vn} - \text{M}}{\text{M}}\text{x}100 = \left(\frac{5.000{,}00 - 4.620{,}83}{4.620{,}83}\right)\text{x}100 = 8{,}21\%$$

$$\text{hp12c} \rightarrow 4.620{,}83 \uparrow 5.000{,}00[\ \Delta(\%)] \rightarrow 8{,}21\%$$

Aplicando 8,21% sobre R$4.620,83 resultará em R$ 5.000,00.

$$4.620{,}83 + \left(4.620{,}83\text{x} \frac{8{,}2057}{100}\right) = 5.000{,}00$$

$$\text{hp12c} \rightarrow 4.620{,}83 \uparrow 8{,}2057[\%] \rightarrow 5.000{,}00$$

- ***DICA:*** também podemos calcular a taxa efetiva partindo apenas da taxa nominal do prazo considerado, ou retornar a taxa nominal a partir da taxa efetiva do prazo considerado. Note que estas expressões devem ser utilizadas na sua forma percentual, e não na forma unitária.

$$i_e(\%) = \frac{i_n}{(100 - i_n)}\text{x}100 \qquad i_n(\%) = \frac{i_e}{(100 + i_e)}\text{x}100$$

$$i_e = \frac{7{,}58\text{x}100}{100 - 7{,}58} \Rightarrow \text{hp12c} \rightarrow 7{,}58 \uparrow 100 \times \uparrow 100 \uparrow 7{,}58 - \div \rightarrow 8{,}20\% \rightarrow \text{f4} \rightarrow 8{,}2057\%$$

$$i_n = \frac{8{,}2057\text{x}100}{100 + 8{,}2057} \Rightarrow \text{hp12c} \rightarrow 8{,}2057 \uparrow 100 \times \uparrow 100 \uparrow 8{,}2057 + \div \Rightarrow 7{,}58\%$$

DESCONTO SIMPLES BANCÁRIO COM A CALCULADORA *hp*12C

Para efetuarmos cálculos com desconto simples bancário, devemos considerar as variáveis da seguinte forma, em relação as teclas financeiras, similar ao cálculo dos juros simples:

TECLA	FUNÇÃO
[n]	Quantidade de dias, sendo o ano comercial 360 dias
[i]	Taxa de Juros correspondente ao ano comercial
[PV]	Valor do capital considerado

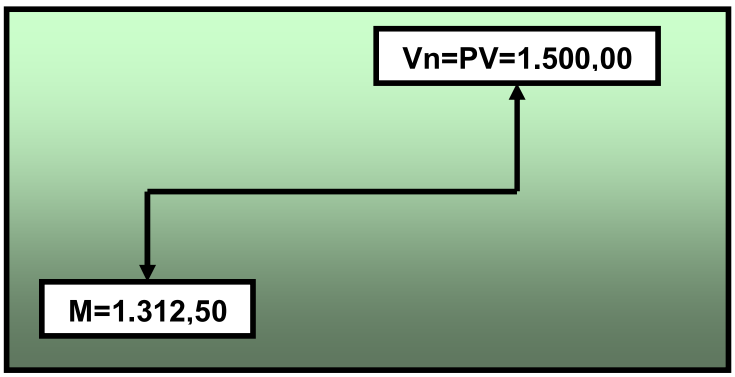
Exemplo: Calcule o valor do desconto para 75 dias considerando uma taxa de juros anual de 60 %, sobre o valor de R$ 1.500,00.

[f] [REG]	1.500,00	[CHS][PV]	[60] [i]	75 [n]	[f] [INT]	R$187,50
Limpa os registros	Imposta o capital	Muda o sinal	Imposta a taxa anual	Imposta os dias	Calcula os juros	Valor do desconto.

- ***Ao acionarmos a tecla [-], teremos o valor de R$1.312,50.***

Taxa efetiva de desconto	R$1.312,50	[RCL][PV] [CHS]	[Δ%]	14,29%

Diagrama do Fluxo de Caixa da Operação



Com a utilização da ***HP12c***, vamos calcular os exemplos 1 e 2 desta seção:

Exemplo1: Vn=R$5.000,00 , i=30%aa , 91 dias

[f] [REG]	5.000,00	[CHS][PV]	[30] [i]	91 [n]	[f] [INT]	R$379,17
Limpa os registros	Imposta o capital	Muda o sinal	Imposta a taxa anual	Imposta os dias	Calcula os juros	Valor do desconto.

- ***Ao acionarmos a tecla [-], teremos o valor de R$4.620,83.***

Taxa efetiva de desconto	R$4.620,83	[RCL][PV] [CHS]	[Δ%]	8,21%

Exemplo2: Vn=R$6.500,00 , i=5%am⇒60%aa , 60 dias

[f] [REG]	6.500,00	[CHS][PV]	[60] [i]	60 [n]	[f] [INT]	R$650,00
Limpa os registros	Imposta o capital	Muda o sinal	Imposta a taxa anual	Imposta os dias	Calcula os juros	Valor do desconto.

- ***Ao acionarmos a tecla [-], teremos o valor de R$5.850,00.***

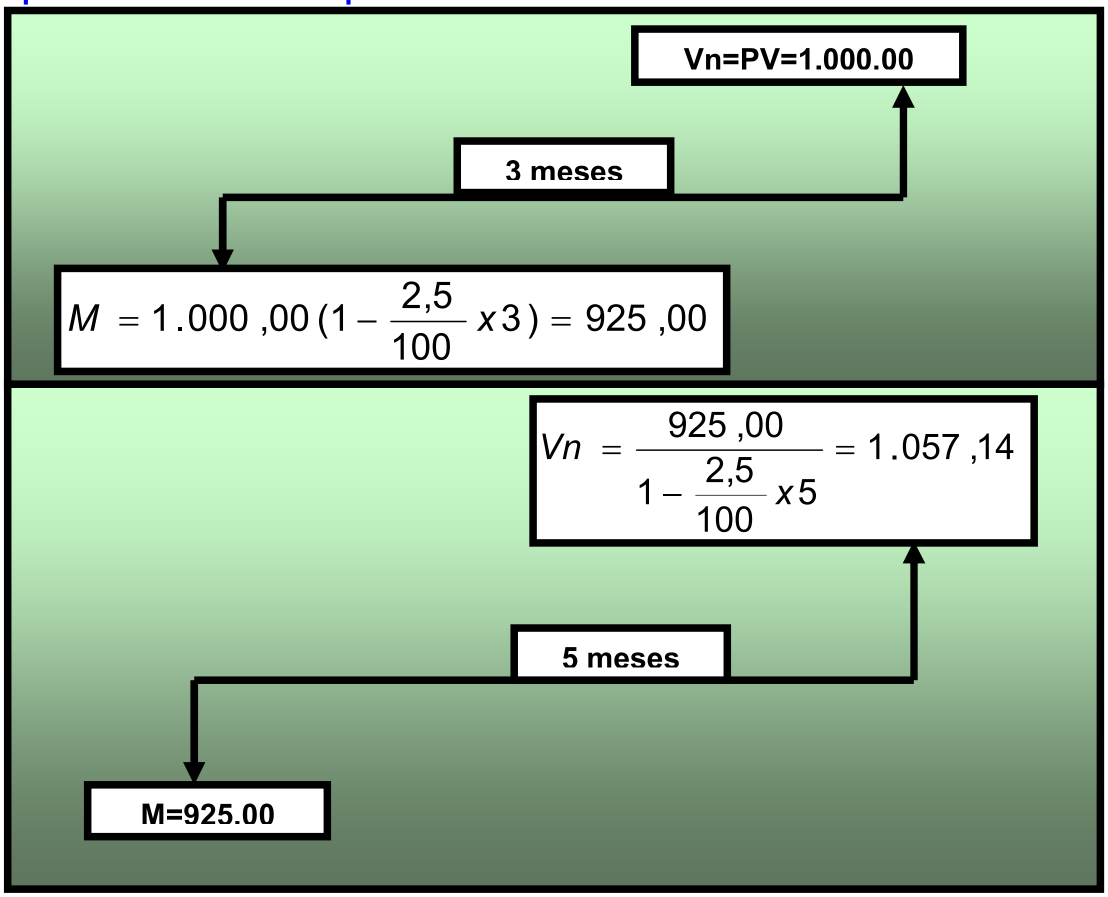
Taxa efetiva de desconto	R$5.850,00	[RCL][PV] [CHS]	[Δ%]	11,11%

EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS PARA O DESCONTO SIMPLES

Na vida comercial prática, é muito comum a substituição de títulos de crédito por outros equivalentes. Através dos exemplos seguintes, verificaremos como calcular estas equivalências.

Exemplo 1: Qual o valor do título com prazo de 5 meses que poderá substituir outro no valor de R$1.000,00, i= 2,5% a.m. e prazo de 3 meses?

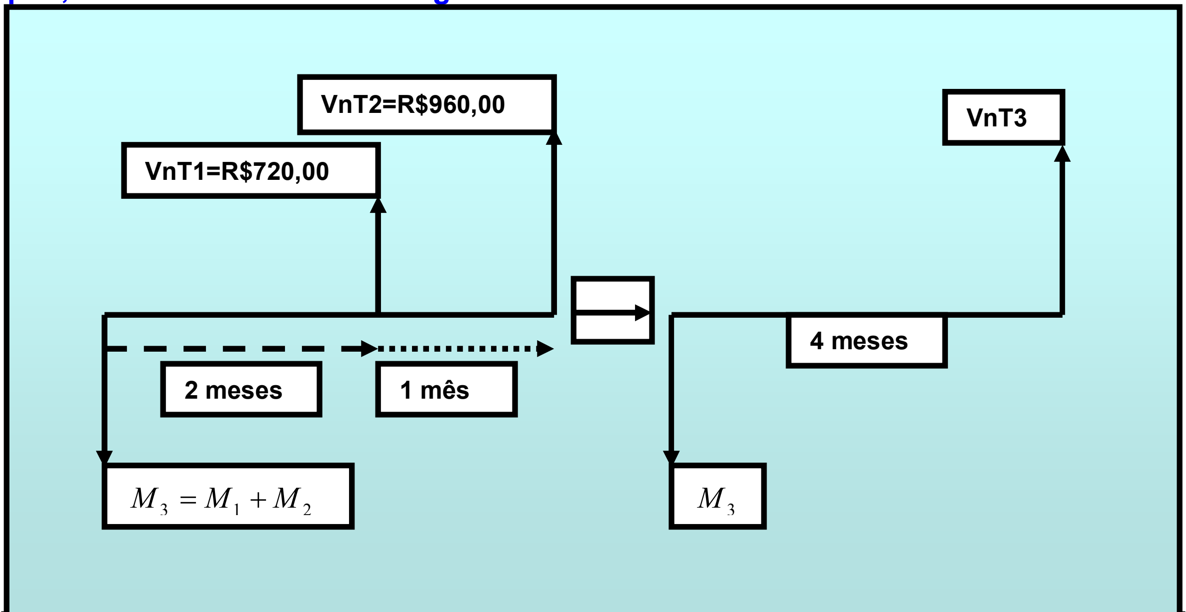
Solução: Inicialmente devemos calcular o valor do montante do título original, e após o valor do título equivalente.



TECLA/FUNÇÃO	VISOR	COMENTÁRIO
1.000,00[CHS][PV]	-1.000,00	Imposta o valor nominal
2,5[↑]12[X][i]	30	Taxa de juros mensal para anual
90[n]	90	Prazo em dias
f[int]	75,00	Valor do Desconto
[-]	925,00	Valor do Montante
2,5[↑]5[X]	12,5	Calcula a Taxa Nominal
[↑]100[↑]12,5[-][÷]100[X]	14,29	Calcula a Taxa Efetiva
[%]	132,14	Calcula o Valor do Desconto
[+]	1.057,14	Valor do novo título.

Exemplo 2: Qual o valor do título com prazo de 4 meses que poderá substituir dois títulos, o primeiro de R$720,00 para dois meses e o segundo de R$960,00 para 3 meses, considerando a taxa de juros simples de 24% a.a.?

Solução: Inicialmente devemos calcular o valor do montante de cada titulo original. Após, vamos somá-los e em seguida calcular o valor nominal do novo título.



$$T_1 \Rightarrow M_1 = 720{,}00(1-\frac{2}{100}x2) = 691{,}20 \subset\supset T_2 \Rightarrow M_2 = 960{,}00(1-\frac{2}{100}x3) = 902{,}40$$

$$T_3 \Rightarrow M_3 = M_1 + M_2 = 691{,}20 + 902{,}40 = 1.593{,}60 \subset\supset VnT_3 \Rightarrow \frac{1.593{,}60}{1-(\frac{2}{100}x4)} = 1.732{,}17$$

TECLA/FUNÇÃO	VISOR	COMENTÁRIO
720,00[CHS][PV]	-720,00	Imposta o valor nominal
24[i]	24	Taxa de Juros anual
60[n]	60	Prazo em dias
f[int]	28,80	Valor do Desconto
[-][STO][0]	691,20	Montante armazenado na tecla [0]
960,00[CHS][PV]	-960,00	Imposta o valor nominal
90[n]	90	Prazo em dias
f[int]	57,60	Valor do Desconto
[-][STO][+][0]	902,40	Montante acrescentado na tecla [0]
[RCL][0]	1.593,60	Montante Total resgatado da tecla [0]
2[↑]4[X]	8,00	Calcula a Taxa Nominal
[↑]100[↑]8[-][÷]100[X]	8,70	Calcula a Taxa Efetiva
[%]	138,57	Calcula o Valor do Desconto
[+]	1.732,17	Valor do novo título.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um capital é aplicado do dia 05 de maio ao dia 25 de novembro do mesmo ano, a uma taxa de juros simples de 36% a. a. , produzindo um montante de R$4.800,00. Nessas condições, calcule o capital aplicado.

$$C = \frac{M}{(1 + i.t)} = \frac{4.800,00}{1 + \frac{36}{100} x \frac{204}{360}} = 3.986,71$$

$$f[REG]05.052002 \uparrow 25.112002 g[\Delta DYS]360 \div 36 \times [i]1[n]4.800,00[FV][PV]$$

2. A quantia de R$10.000,00 foi aplicada a juros simples exatos do dia 12 de abril ao dia 5 de setembro do corrente ano. Calcule os juros obtidos, à taxa de 18% a.a..

$$J = Cit = 10.000,00 \; x \; \frac{18}{100} \; x \; \frac{146}{365} = 720,00$$

$$f[REG]10.000,00[CHS][PV]146[n]18[i]f[INT][R\downarrow][R\downarrow]$$

3. Ao efetuar a aquisição de um bem de consumo no valor de R$ 1.500,00, com taxa de juros simples de 72% a.a. você obteve o prazo de 125 dias para o pagamento. Calcule o valor da liquidação da dívida, considerando 2 pagamentos intermediários de R$400,00 (25 dias) e R$600,00 (75 dias após).

$$M1 = [1.500 x (1 + \frac{72}{100} x \frac{25}{360})] - 400,00 = 1.175,00$$

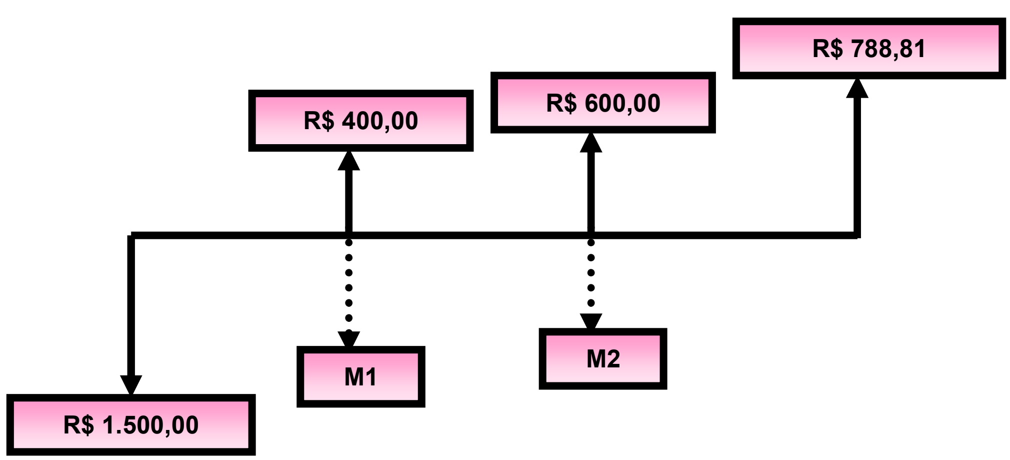
$$M2 = [1.175,00 x (1 + \frac{72}{100} x \frac{75}{360})] - 600 = 751,25$$

$$Mfinal = 751,25 x (1 + \frac{72}{100} x \frac{25}{360}) = 788,81 \therefore$$

$$f[REG]72[i]1.500,00[CHS][PV]25[n]f[INT][+]400[-] \rightarrow 1.175,00$$

$$1.175,00[CHS][PV]75[n]f[INT][+]600[-] \rightarrow 751,25$$

$$751,25[CHS][PV]25[n]f[INT][+] \rightarrow 788,81$$



4. Uma firma deseja alterar as datas e valores de um financiamento contratado. Este financiamento foi contratado há 30 dias, com uma taxa de juros simples de 2,0% a.m. A instituição financiadora não cobra tarifas e a taxa de juros não sofrerá alterações.

- ❖ Condições pactuadas inicialmente: pagamento de duas prestações iguais e sucessivas de R$11.024,00 a serem pagas em 60 e 90 dias.
- ❖ Condições desejadas: pagamento em três prestações iguais, com a primeira ao final do 10º mês, a Segunda ao final do 30º mês, e a terceira ao final do 70º mês.
- ❖ Caso sejam aprovadas as alterações, o valor que mais se aproxima do valor unitário de cada uma das novas prestações é:

Solução

$$C = \frac{M1}{1+it} + \frac{M2}{1+it} = \frac{11.024,00}{1+0,02x2} + \frac{11.024,00}{1+0,02x3} = 21.000,00$$

$$21.000,00 = \frac{M}{1+0,02x10} + \frac{M}{1+0,02x30} + \frac{M}{1+0,02x70}$$

$$M = 11.200,00$$

5. Uma pessoa possui um financiamento com taxa de juros simples de 10% a.m. O valor total dos pagamentos a serem realizados, juros mais principal, é de R$ 1.400,00. As condições contratuais prevêem que o pagamento deste financiamento será efetuado em duas parcelas. A primeira parcela, no valor de 70% do total dos pagamentos, será paga ao final do quarto mês, e a Segunda parcela no valor de 30% do total dos pagamentos será paga ao final do décimo-primeiro mês. O valor que mais se aproxima do valor financiado é:

Solução

$$C = \frac{1.400,00x0,7}{1+0,1x4} + \frac{1.400,00x0,3}{1+0,1x11} = 700,00 + 200,00 = 900,00$$

6. Um investidor dispunha de R$300.000,00 para aplicar. Dividiu esta aplicação em duas partes. Uma parte foi aplicada no banco Alfa, à taxa de 8% a.m., e a outra parte no banco Beta, à taxa de 6% a.m., ambas em juros compostos. O prazo de ambas as aplicações foi de um mês. Se após este prazo, os valores resgatados forem iguais nos dois bancos, os valores de aplicação, em reais, em cada banco, foram, respectivamente:

Solução

$$300.000,00 = \frac{M}{1+it} + \frac{M}{1+it} = \frac{M}{1+0,06x1} + \frac{M}{1+0,08x1} \Rightarrow M = 160.485,98$$

$$C_1 = \frac{M}{1,06} = \frac{160.485,98}{1,06} = 151.401,87$$

$$C_2 = \frac{M}{1,08} = \frac{160.485,98}{1,08} = 148.598,13$$

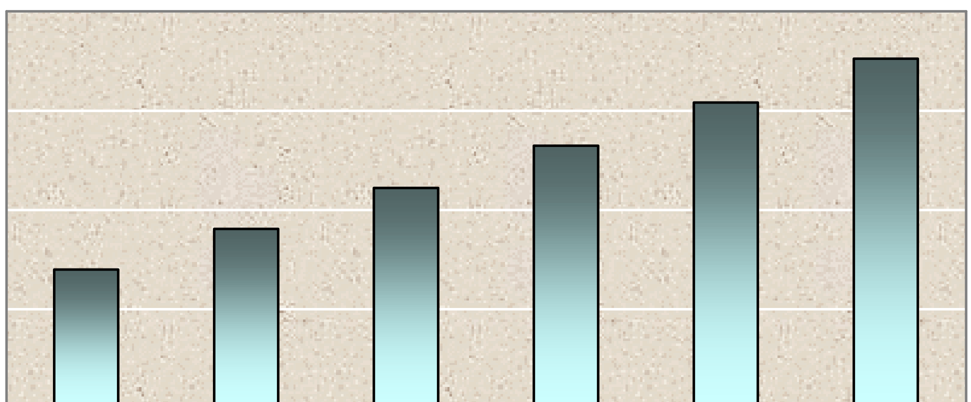
JURO COMPOSTO

No conceito de juros compostos existe a capitalização dos juros sobre o valor principal a cada período. Aqui, a variável tempo é representada pela letra **n**. Vamos utilizar de um exemplo para iniciarmos o estudo, comparando com os juros simples

Exemplo: Capital de R$10.000,00, juros de 2% ao mês, e prazo de 6 meses .É fácil verificarmos que a evolução dos juros capitalizados poderia ser representada por uma série de juros simples, em que o valor anterior de cada período representa o valor inicial do período seguinte. Assim, teremos:

PERÍODO	CAPITAL	TAXA PERIÓDICA	MONTANTE
1	10.000,00	2,00%	10.200,00
2	10.200,00		10.404,00
3	10.404,00		10.612,08
4	10.612,08		10.824,32
5	10.824,32		11.040,81
6	11.040,81		11.261,62

Assim, o nosso gráfico teria a seguinte forma. Compare com o gráfico dos Juros Simples, e observe que aqui o crescimento não é linear, mas tem um comportamento exponencial.



	1 mês	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses
VALOR	10.200,00	10.404,00	10.612,08	10.824,32	11.040,81	11.261,62

No entanto, é obvio verificarmos que este método seria muito demorado e trabalhoso. Para facilitar, vamos utilizar da tabela anterior para verificarmos que:

MONTANTE = [CAPITAL + (CAPITAL X TAXA DE JUROS)],

ou M = [C + (C x i)] = C (1 + i)

Assim, teremos para cada período o acréscimo da série **(1 + i)**, que no nosso caso corresponde a **(1,02)** . Veja a tabela seguinte.

PERÍODO	CAPITAL	TAXA PERIÓDICA	MONTANTE
1	10.000,00	(1,02)	10.200,00
2		(1,02)(1,02)	10.404,00
3		(1,02)(1,02)(1,02)	10.612,08
4		(1,02)(1,02)(1,02)(1,02)	10.824,32
5		(1,02)(1,02)(1,02)(1,02)(1,02)	11.040,81
6		(1,02)(1,02)(1,02)(1,02)(1,02)(1,02)	11.261,62

Poderemos, então, facilmente deduzir que para **n** períodos teremos **n** vezes repetida a série **(1 + i)**. Assim, podemos afirmar que:

$$M = C(1+i)^n$$

Com esta fórmula, podemos calcular o valor do montante composto para qualquer período, sem necessidade de seguirmos uma série. Observe os seguintes cálculos:
No quadro abaixo, utilizamos a ***hp12c*** para efetuar os cálculos de forma matemática.

$$M = C(1+i)^n$$

$$para \quad 2 \quad períodos \quad \rightarrow M = 10.000,00\,(1+\frac{2}{100})^2 = 10.404,00$$

$$hp12c \Rightarrow 10.000,00 \uparrow 1 \uparrow 2 \uparrow 100 \; [\div][+]2[y^x][x]$$

$$para \quad 3 \quad períodos \quad \rightarrow M = 10.000,00\,(1+\frac{2}{100})^3 = 10.612,08$$

$$hp12c \Rightarrow 10.000,00 \uparrow 1 \uparrow 2 \uparrow 100 \; [\div][+]3[y^x][x]$$

$$Para \quad 6 \quad períodos \quad \rightarrow M = 10.000,00\,(1+\frac{2}{100})6 = 11.261,62$$

$$hp12c \Rightarrow 10.000,00 \uparrow 1 \uparrow 2 \uparrow 100 \; [\div][+]6[y^x][x]$$

E na tabela seguinte efetuamos os cálculos utilizando o teclado financeiro:

Tecla/Função	Visor	Comentário
10000,00[CHS][PV]	-10.000,00	Informa o valor do capital (principal)
2[i]	2	Informa a taxa de juros periódica
1[n] [FV]	10.200,00	Calcula o montante para o primeiro período
2[n] [FV]	10.404,00	Calcula o montante para o segundo período
3[n] [FV]	10.612,08	Calcula o montante para o Terceiro período
4[n] [FV]	10.824,32	Calcula o montante para o quarto período
5[n] [FV]	11.040,81	Calcula o montante para o quinto período
6[n] [FV]	11.261,62	Calcula o montante para o sexto período
RCL[PV][CHS]	10.000,00	Retorna o valor principal para o visor
RCL[FV]	11.261,62	Retorna o valor final para o visor
[Δ%]	12,62	Calcula a taxa efetiva de juros para 6 períodos

TAXA NOMINAL, EFETIVA E EQUIVALENTE EM JURO COMPOSTO

Também conhecida como taxa contratada, a taxa nominal é aquela representada sem a capitalização dos juros. Já a taxa efetiva é resultado da taxa nominal capitalizada . Quanto a taxa equivalente , existe quando mesmo havendo períodos de capitalização diferentes a aplicação da taxa de juros sobre um capital produzirem valores de juros proporcionais. A fórmula que calcula a taxa equivalente é representada da seguinte forma:

$$Ieq = [(1 + i_c)^{\frac{d}{c}} - 1]x100$$

Onde: ***d*** = Período Desejado, ***c*** = Período Conhecido e $\boldsymbol{i_c}$ =Taxa do Período Conhecido.

Exemplos:

Considere uma linha do tempo, conforme a tabela abaixo, com 12 meses (períodos).

01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**

Vamos considerar duas situações:

1. Se a taxa efetiva anual for de 12% a.a., em cada mês deveremos ter uma taxa menor do que 1% .

a) Três meses:

$$Ieq = [(1 + \frac{12}{100})^{\frac{3}{12}} - 1]x100 = 2{,}87\%$$

b) Seis meses:

$$Ieq = [(1 + \frac{12}{100})^{\frac{6}{12}} - 1]x100 = 5{,}83\%$$

c) Doze meses

$$Ieq = [(1 + \frac{12}{100})^{\frac{12}{12}} - 1]x100 = 12{,}00\%$$

2. Se a taxa nominal anual for de 12% a.a., cada período terá uma taxa de 1% que capitalizada resultará em 12,68% a.a.

a) Três meses:

$$Ieq = [(1 + \frac{1}{100})^{\frac{3}{1}} - 1]x100 = 3{,}03\%$$

b) Seis meses:

$$Ieq = [(1 + \frac{1}{100})^{\frac{6}{1}} - 1]x100 = 6{,}15\%$$

c) Doze meses:

$$Ieq = [(1 + \frac{1}{100})^{\frac{12}{1}} - 1]x100 = 12{,}68\%$$

CÁLCULO DE TAXAS EQUIVALENTES COM A *hp*12C

Para que possamos facilitar os cálculos na ***hp12c***, vamos impostar um programa que relaciona as taxas de juros nominal, efetiva e equivalente, conforme abaixo:

Tecla Utilizada	Visor da Calculadora comum	Visor da Calculadora Platinum
Sem programação	g9 P- 08 r - 20	g9 P- 008 r - 20
[f][P/R][f][PRGM]	00-	000-
[1]	01- 1	001- 1
[enter]	02- 36	002- 36
[enter]	03- 36	003- 36
[RCL][i]	04- 45 12	004- 45 12
[%]	05- 25	005- 25
[+]	06- 40	006- 40
[RCL][PV]	07- 45 13	007- 45 13
[RCL][FV]	08- 45 15	008- 45 15
[tecla de divisão]	09- 10	009- 10
[y^x]	10- 21	010- 21
[Δ%]	11- 24	011- 24
[g][GTO] [0][0]	12- 43.33 00	011- 24
f[P/R]	0,00 (Concluído)	0,00 (Concluído)
Com programação	g9 P- 15 r - 19	g9 P- 015 r - 20

Devemos considerar as funções para as seguintes teclas, que são diferentes quando usadas no modo financeiro:

TECLA	COMENTÁRIO DA FUNÇÃO
[i]	Informa a taxa efetiva para o período conhecido
[FV]	Informa o prazo a que a taxa [i] se refere.
[PV]	Informa o prazo em que desejamos conhecer a taxa equivalente
[R/S]	Fornece a taxa equivalente.

Para uma melhor compreensão, efetuamos os cálculos anteriores na tabela abaixo.

TAXA [i]	PERÍODO CONHECIDO [FV]	PERÍODO DESEJADO [PV]	TAXA EQUIVALENTE [R/S]
12	12	3	2,87
12	12	6	5,83
12	12	12	12,00
1	1	3	3,03
1	1	6	6,15
1	1	12	12,68

Também podemos efetuar alguns cálculos utilizando um valor índice na calculadora. Acompanhe os exemplos seguintes.

Exemplo 1: Determine a taxa de juros efetiva para uma taxa mensal de 2% para 6, 12 e 18 meses.

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
100,00[CHS][PV]	- 100,00	Introduz o valor índice
2[i]	2	Introduz a taxa de juros
6[n]	6	Introduz a quantidade de períodos
[FV]	112,62	12,62 % de Taxa Efetiva
12[n]	12	Introduz a quantidade de períodos
[FV]	126,82	26,82 % de Taxa Efetiva
18[n]	18	Introduz a quantidade de períodos
[FV]	142,82	42,82 % de Taxa Efetiva

Exemplo 2: Determine a taxa mensal que resultou em uma taxa efetiva de 26,82% em 12 meses.

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
100,00[CHS][PV]	- 100,00	Introduz o valor índice
126,82 [FV]	126,82	Introduz o valor índice indexado pela taxa
12[n]	12	Introduz a quantidade de períodos
i	2	2 % de Taxa Mensal

Em outra situação, em que podemos ter taxas distintas por período, precisamos efetuar o cálculo da taxa efetiva (equivalente) de forma mecânica, e para isto precisamos utilizar o conceito de fator de taxa.

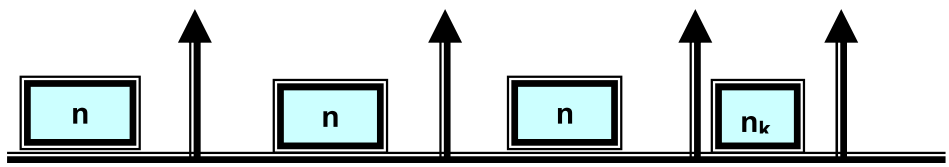
$$\boxed{Fator\ \ de\ \ \ Taxa = F_t\ = 1 + \frac{i}{100}}$$

Exemplo - Uma taxa de juros capitalizada sofreu três alterações sucessivas, de 2%,3% e 5% . Qual o valor efetivo desta taxa?

$$\boxed{\begin{array}{l} Fator\ \ de\ Taxa = (1+\dfrac{2}{100}) \times (1+\dfrac{3}{100}) \times (1+\dfrac{5}{100}) = 1{,}1031 \\ Taxa\ \ Efetiva = (1 - F_t)x100 = (1 - 1{,}1031)x100 = 10{,}313\% \end{array}}$$

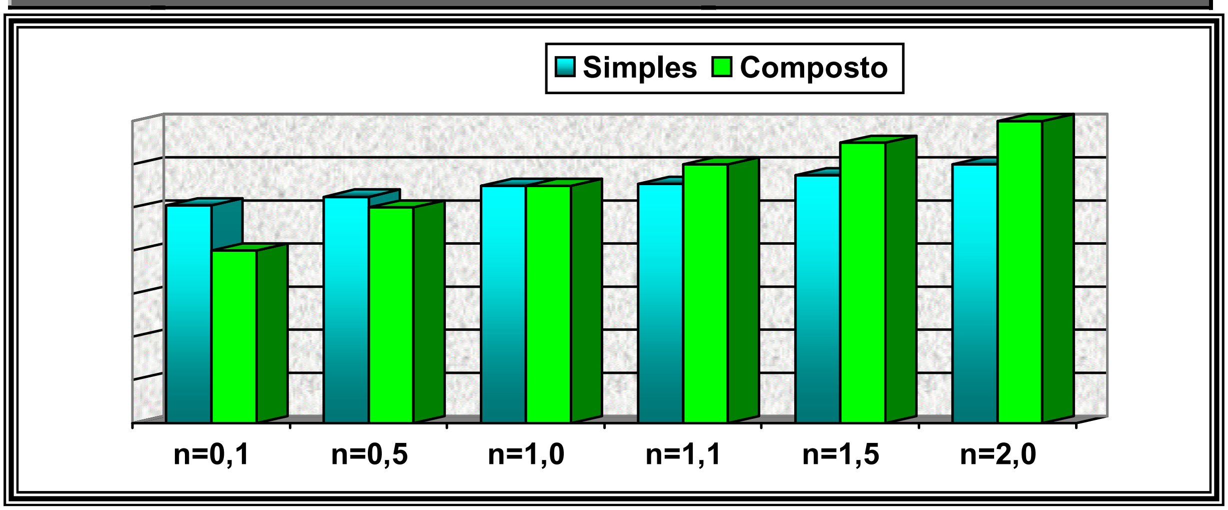
PERÍODOS NÃO INTEIROS OU PERÍODO SINGULAR

Quando houver a situação de existirem períodos fracionários, ou seja, não inteiros em uma série financeira, podemos representar graficamente da seguinte forma, onde **n** são períodos inteiros e iguais, e $\mathbf{n_k}$ um período fracionário denominado período singular, sendo $\mathbf{n > n_k}$.



E aqui ocorre uma interessante situação, em que no período singular os juros compostos são menores que os juros simples. Para que possamos entender o motivo, consideremos a situação de um capital unitário C=1 aplicado durante dois períodos a uma mesma taxa de juros periódica de 10% , uma capitalizada e a outra não. E para cada período efetuaremos a divisão em 03(três) partes. Assim, teremos:

Período	Juros Simples M= C (1 + i x n)	Juros Compostos M = C (1+i)^{n}
n=0,1	M=1(1+0,10 x 0,1) = 1,010	M = 1 (1+ 0,10)^{0,1} = 1,00960
n=0,5	M=1(1+0,10 x 0,5) = 1,050	M = 1 (1+ 0,10)^{0,5} = 1,04881
n=1,0	M=1(1+0,10 x 1,0) = 1,100	M = 1 (1+ 0,10)^{1,0} = 1,10000
n=1,1	M=1(1+0,10 x 1,1) = 1,110	M = 1 (1+ 0,10)^{1,1} = 1,11053
n=1,5	M=1(1+0,10 x 1,5) = 1,150	M = 1 (1+ 0,10)^{1,5} = 1,15369
n=2,0	M=1(1+0,10 x 2,0) = 1,200	M = 1 (1+ 0,10)^{2,0} = 1,21000



Assim, podemos observar que em um determinado instante as duas são iguais numericamente. Este instante é o n=1 em que os juros simples e compostos são iguais, e podemos provar, através da seguinte manipulação algébrica, que :

$$\boxed{\begin{array}{l} n < 1 \Rightarrow Juros\ \ Simples > \ Juros\ \ \ Compostos \\ n = 1 \Rightarrow Juros\ \ Simples = Juros\ \ \ Compostos \\ n > 1 \Rightarrow Juros\ \ Simples < Juros\ \ \ Compostos \end{array}}$$

E certamente

$$M = C(1 + i.n) \rightarrow Juros\ Simples$$
$$M = C(1 + i)^n \rightarrow Juros\ \ Compostos$$
$$n = 1 \Rightarrow\ \ M(n = 1) = C(1 + i.1) = C(1 + i)^1 = C(1 + i)$$

Desta forma, teremos duas possibilidades de calcularmos os juros dentro do período singular.

a) Convenção Linear: utilizando juros simples. Na calculadora ***hp12c,*** deveremos retirar do visor a letra "**c**".

b) Convenção Exponencial: utilizando juros compostos. Na calculadora ***hp12c,*** deveremos ter no visor a letra "**c**".

Observação: para incluirmos ou retirarmos a letra "**c**" do visor da calculadora, devemos digitar em seqüência as teclas **[STO][EEX].**

Exemplo

Calcule o valor para liquidar um financiamento bancário de R$3.000,00 por um prazo de 110 dias, com uma taxa de juros mensal de 5% a.m. com capitalização mensal.

Solução: Para efetuarmos o cálculo algebricamente, vamos dividir o problema em três partes.

a) Calcular o montante para 3 períodos inteiros com capitalização mensal:

$$M = C(1 + i)^n = 3.000,00\ x(1 + \frac{5}{100})^3 = 3.472,88$$
$$3.000,00[CHS][PV]5[i]3[n][FV]$$

b) Convenção Linear: Acrescentar o valor referente aos 20 dias do período singular como juros simples. (Tire a letra "**c**" do visor da ***hp12c***)

$$M_{LINEAR} = C(1 + it) = 3.472,88(1 + \frac{5}{100} x \frac{20}{30}) = 3.588,64$$
$$3.000,00[CHS][PV]110 \uparrow 30 \div [n]5[i][FV]$$

c) Convenção Exponencial: Acrescentar o valor referente aos 20 dias do período singular como juros compostos. (Inclua a letra "**c**" no visor da ***hp12c***)

$$M_{EXPONENCIAL} = C(1 + i)^n = 3.472,88\,x(1 + \frac{5}{100})^{\frac{20}{30}} = 3.587,69$$
$$[STO][EEX][FV][FV]$$

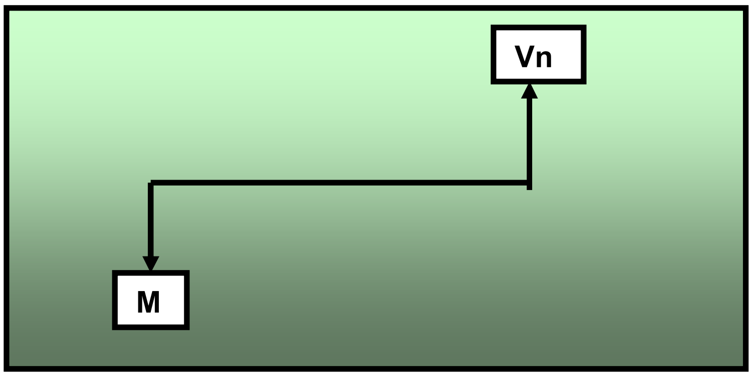
Observe que consideramos os dados já impostados no item b.

DESCONTO COMPOSTO BANCÁRIO, COMERCIAL OU POR FORA

Trata-se do montante resultante de um desconto composto, que é calculado através da descapitalização efetuada sobre um valor futuro, onde:

- **Vn** é o valor nominal do título (valor final).
- **i** é a taxa de juros periódica da operação.
- **n** é prazo da operação, contendo o número de períodos da operação.

Representando graficamente, teremos:



O valor do desconto composto será calculado da seguinte forma, similarmente ao desconto simples, onde:

$$M = V_n(1 - i.t)$$

$$t = 1 \rightarrow M = V_n(1 - i)$$

Assim, teremos para cada período o decréscimo da série **(1 - i)**. Poderemos, então, facilmente deduzir que para **n** períodos teremos **n** vezes repetida a série **(1 – i).** Assim, podemos afirmar que:

$$M_c = V_n(1 - i)^n$$

Exemplo: Vamos calcular o valor do desconto para uma duplicata de R$ 5.000,00 vencível no dia 31/12 e que desejamos quitar no dia 01/10. A taxa de juros informada é de 30% a.a.

Solução: Entre as datas consideradas temos 3 meses, ou seja, 3 períodos inteiros. Desta forma, calculamos:

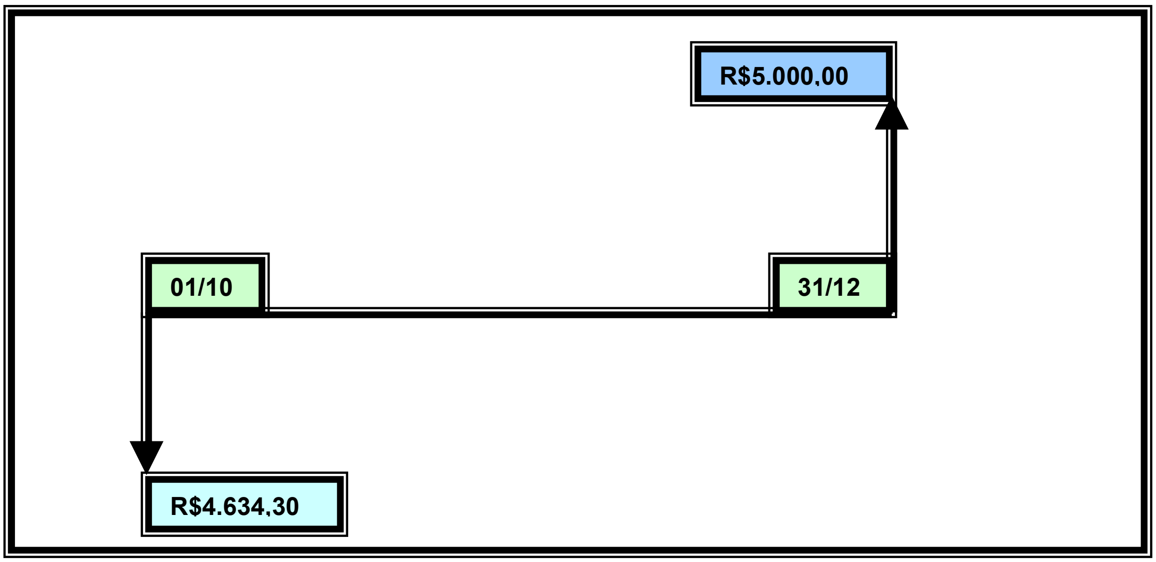
$$M = Vn(1-i)^n = 5.000,00(1-\frac{30}{12x100})^3 = 4.634,30$$

$$5.000,00[CHS][PV]30 \uparrow 12 \div [CHS][i]3[n][FV]$$

$$OU \quad 5.000,00[CHS][PV]30[CHS]g[i]3[n][FV]$$

Nota: utilizamos o juro negativo na *hp12c* em função do sinal aplicado na fórmula.

Graficamente, teremos:



TAXA DE JUROS EFETIVA PARA DESCONTO COMPOSTO BANCÁRIO

Na situação do desconto composto comercial, a taxa de juros periódica é uma taxa nominal, razão pela qual devemos primeiramente transformá-la em efetiva para posteriormente buscarmos a taxa equivalente da operação.

$$Ie = \frac{in}{(100-in)}x100 = \frac{2,5}{(100-2,5)}x100 = 2,5641\%$$

$$Ieq = [(1+i_c)^{\frac{d}{c}} - 1]x100 = [(1+\frac{2,5641}{100})^3 - 1]x100 = 7,8912\%$$

$$Ieq = \frac{(5.000,00 - 4.634,30)}{4.634,30}x100 = 7,8912\%$$

DESCONTO COMPOSTO RACIONAL OU POR DENTRO

Trata-se do montante resultante de um desconto composto, que é calculado através da descapitalização efetuada sobre um valor futuro, onde:

- **Vr** é o valor racional do título (valor inicial).
- **i** é a taxa de juros periódica da operação.
- **n** é prazo da operação, contendo o número de períodos da operação

Relacionando matematicamente, teremos:

$$M_r = V_r(1+i)^n$$

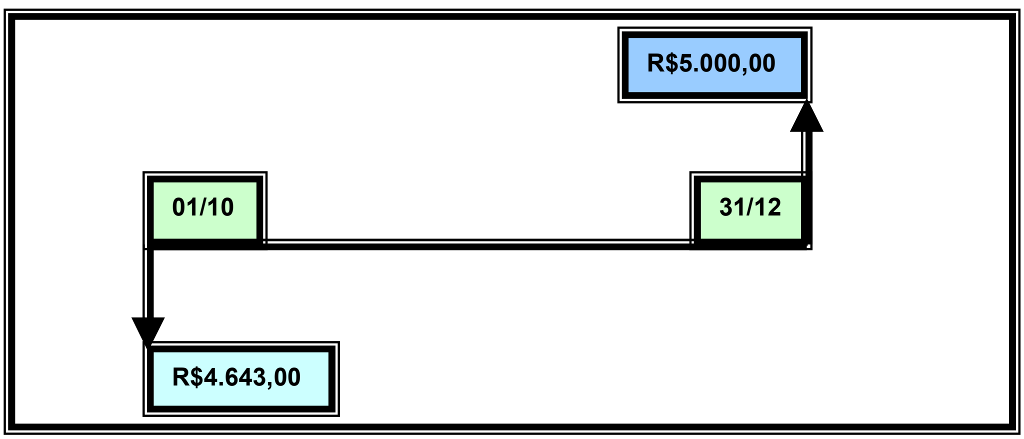
Exemplo: Calcular o valor do desconto racional para uma duplicata de R$5.000,00 vencível no dia 31/12 e que desejamos quitar no dia 01/10. A taxa de juros informada é de 30% a.a.

Solução: Entre as datas consideradas temos 3 meses, ou seja, 3 períodos inteiros. Desta forma, calculamos:

$$Mr = Vr(1+i)^n \Rightarrow Vr = \frac{Mr}{(1+i)^n} = \frac{5.000,00}{(1+\frac{30}{12x100})^3} = 4.643,00$$

$$5.000,00[CHS][FV]3[n]30g[i][PV]$$

Graficamente, teremos:



TAXA DE JUROS EFETIVA PARA DESCONTO COMPOSTO RACIONAL

Na situação do desconto composto racional, a taxa de juros periódica é uma taxa efetiva. Portanto, para obtermos a taxa equivalente da operação, basta aplicarmos a fórmula da taxa equivalente.

$$Ieq = [(1+i_c)^{\frac{d}{c}} - 1]x100 = [(1+\frac{2,5}{100})^3 - 1]x100 = 7,6981\%$$

COMENTÁRIOS SOBRE LOGARITMOS

O logaritmo é a função inversa da função exponencial. As principais propriedades, e as mais utilizadas em matemática financeira, são:

$$b = a^x \Leftrightarrow \log_a b = x$$
$$\log(axb) = \log a + \log b$$
$$\log(a \div b) = \log a - \log b$$
$$\log a^n = n \log a$$

Porém, na ***hp12c*** temos apenas o logaritmo natural (base **e**). Podemos utilizar esta base para os cálculos, mas se desejarmos calcular na base 10, necessitamos efetuar a seguinte operação:

1ª - Calculamos o logaritmo natural do número "x" contido no visor.**{ g[LN](X)}.**

2ª - Pressionamos **10 g[LN]**÷

Exemplo: Calcule o logaritmo na base 10 dos números da tabela abaixo.

Número	Logaritmo na base 10
2	**2 g[LN]10 g[LN]**÷**f**[6] ⇒**0,301030**
10	**10 g[LN]10 g[LN]**÷**f**[6] ⇒**1,000000**
1,05	**1,05 g[LN]10 g[LN]**÷**f**[6] ⇒**0,021189**

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considerando juros compostos, calcule o prazo em que um capital de R$10.000,00 dobrará de valor com uma taxa de 5% ao período? Solução :

$$M = C(1+i)^n \Rightarrow 20.000,00 = 10.000,00(1+\frac{5}{100})^n \Rightarrow 2 = 1,05^n$$
$$\log 2 = \log 1,05^n = n \log 1,05 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,05} = \frac{0,301030}{0,021189} = 14,21$$

- Onde 14 corresponde a 14 períodos e 21 a 21% de um período.
- Com a *hp12c,* podemos calcular o valor inteiro mais próximo da seguinte forma, utilizando o teclado financeiro.

20.000,00[FV] 10.000,00[CHS][PV] 5[i] [n]⇒ 15 períodos

2. Considerando juros compostos, calcule a taxa de juros necessária para que uma aplicação financeira de R$5.000,00 com prazo de 10 meses dobre de valor. Solução:

$$M = C(1+i)^n \Rightarrow 10.000,00 = 5.000,00(1+i)^{10} \Rightarrow 2 = (1+i)^{10}$$
$$\sqrt[10]{2} = \sqrt[10]{(1+i)^{10}} \Rightarrow 1,071773 = (1+i) \Rightarrow i = 1,071773 - 1 = 0,071773$$
$$i = 0,071773 \; x100 = 7,18\,\%$$

Com a ***hp12c*** , podemos calcular a taxa utilizando o teclado financeiro:

5.000,00[CHS][PV] 10.000,00[FV] 10[n] [i]⇒7,18

3. Calcule o valor racional descontado de um título cujo valor é de R$10.000,00, a taxa de juros nominal anual é de 72% ao ano, e o prazo de antecipação é de 75 dias. Qual é a taxa efetiva para o prazo da operação:

$$Mr = Vr(1+i)^n \Rightarrow 10.000,00 = Vr(1+\frac{72}{12x100})^{\frac{75}{30}} \Rightarrow Vr = 8.644,41$$

$$Ie = \frac{10.000,00 - 8.644,41}{8.644,41}x100 = 15,68\% \Leftrightarrow Ie = [(1+\frac{72}{12x100})^{\frac{75}{30}} - 1]x100 = 15,68\%$$

Com a ***hp12c***, podemos calcular o montante da seguinte forma:

10.000,00[FV] 72 [g] [i] 75 ↑ 30 [÷] [n] [PV] ⇒ - 8.644,41

- **Observe que impostamos o prazo [n] como uma fração no teclado financeiro, e obtivemos o resultado diretamente. Já no exemplo 1 desta série, a resposta para o prazo [n] foi fornecida como um número inteiro (aproximado).**
- **Já a taxa efetiva da operação pode ser calculada da seguinte forma:**
  8.644,41↑10.000,00 [Δ%] ⇒ 15,68 %

4. Calcule o valor atual de um título no valor de R$15.000,00 considerando uma taxa de desconto composto de 60% ao ano, com capitalização mensal, considerando uma antecipação de 130 dias. Calcule a taxa efetiva mensal.

$$Mc = Vn(1-i)^n = 15.000,00(1-\frac{60}{12x100})^{\frac{130}{30}} = 12.010,48$$

$$Ie = \frac{15.000,00 - 12.010,48}{12.010,48}x100 = 24,89\%$$

$$Ie(mensal) = \frac{5}{100-5}x100 = 5,263\% \Rightarrow Ie = [(1+\frac{5,263}{100})^{\frac{130}{30}} - 1]x100 = 24,89\%$$

Podemos efetuar o cálculo do montante utilizando o teclado financeiro, impostando a taxa de juros negativa e o prazo sob forma fracionária.

15.000,00 [CHS][PV] 60[CHS]g[i] 130↑30[÷] [n] [FV] ⇒ 12.010,48

Cálculo da taxa efetiva da operação: [RCL][PV][CHS][Δ%] ⇒ 24,89

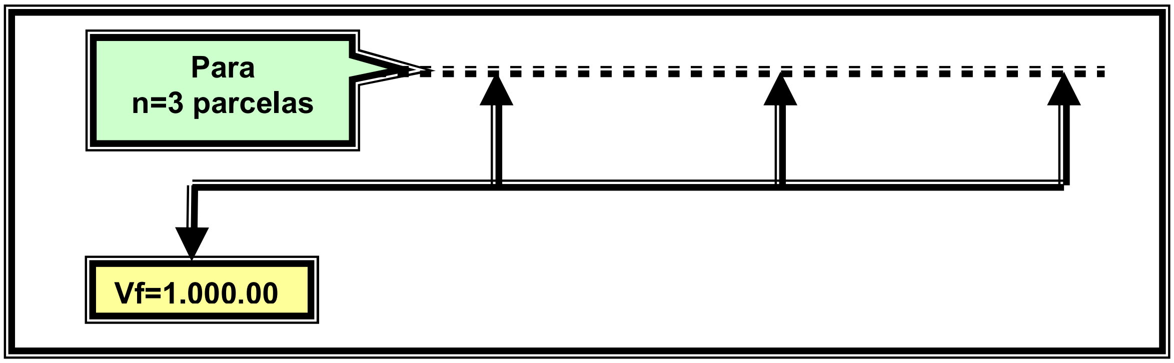
Ou de outra forma: 12.010,48 ↑ 15.000,00 [Δ%] ⇒ 24,89

SÉRIES UNIFORMES DE PAGAMENTO, ANUIDADES OU RENDA CERTA

Ao considerarmos uma sucessão de pagamentos ou recebimentos, com prazo pré-determinado, período iguais e valores constantes, temos o conceito que é mais conhecido como Renda Certa, pela sua uniformidade. Quanto a forma de pagamento, podem ser antecipadas ou postecipadas. Utilizaremos dos exemplos seguintes para introduzir os conceitos e as fórmulas, tornando mais prática a compreensão.

Exemplo 1: Ao efetuar a aquisição de um bem de consumo no valor de R$1.000,00, você concordou em pagar 3 prestações sem entrada considerando uma taxa de juros anual de 60%. Calcule o valor da prestação mensal fixa, e os encargos decorrentes do financiamento.

Solução: Visualize a operação através do gráfico:



Como podemos observar no gráfico, os valores dos pagamentos periódicos devem ser rigorosamente iguais. A fórmula a ser utilizada nesta situação é a seguinte:

$$P = \frac{Vfxi}{[1-(1+i)^{-n}]} \Rightarrow Vf = Px\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

Substituindo, teremos:

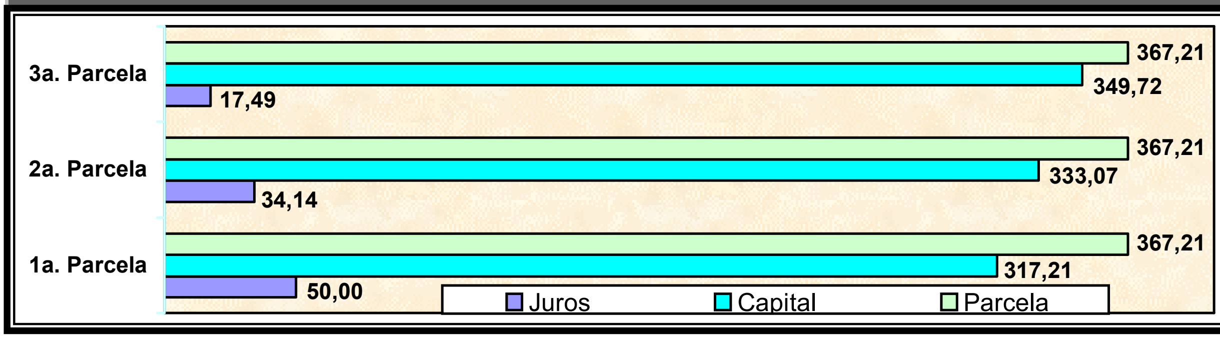
$$P = \frac{1.000,00\ x\ \frac{5}{100}}{[1-(1+\frac{5}{100})^{-3}]} = 367,21$$

Portanto, efetuaremos 3 pagamentos iguais de R$367,21. Este tipo de série é mais conhecido como Sistema Price de Financiamento sem entrada, e se trata de uma Série Uniforme de Pagamento Postecipada. E possui a característica de em cada parcela efetuar o pagamento integral dos juros sobre o saldo devedor, conforme a tabela seguinte:

Parcela	Saldo	Juros Pagos (5% s/Saldo Devedor)	Cap. Amortizado
367,21	1.000,00	(5%s/1.000,00)=50,00	(367,21-50,00)=317,21
367,21	682,79	50,00+34,14(5%s/682,79)=84,14	(367,21-34,14)=333,07
367,21	349,72	84,14+17,49(5%s/349,72)=101,63	(367,21-17,49)=349,72

Acompanhe a seguinte seqüência de cálculos pela ***hp12c***

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
1000,00[CHS][PV]	- 1.000,00	Introduz o valor financiado
60 [g] [i]	5	Introduz a taxa de juros periódica
3[n]	3	Introduz a quantidade de parcelas
[PMT]	367,21	Calcula o valor da parcela
1[f][amort]	50,00	Calcula o valor dos juros pagos na 1ª parcela
[R↓]	317,21	Calcula o valor do capital pago na 1ª parcela
[RCL][PV]	- 682,79	Saldo devedor após o pagamento da 1ª parcela
1000,00[CHS][PV]	- 1.000,00	Recompõe o saldo devedor
2[f][amort]	84,14	Calcula o valor dos juros pagos até a 2ª parcela
[R↓]	650,28	Calcula o valor do capital pago até a 2ª parcela
[RCL][PV]	- 349,72	Saldo devedor após o pagamento da 2ª parcela
1000,00[CHS][PV]	- 1.000,00	Recompõe o saldo devedor
3[f][amort]	101,63	Calcula o valor dos juros pagos até a 3ª parcela
[R↓]	1.000,00	Calcula o valor do capital pago até a 3ª parcela
[RCL][PV]	0,00	Saldo devedor após o pagamento da 3ª parcela
Visualize no gráfico abaixo a distribuição do valor dos juros e do capital.		

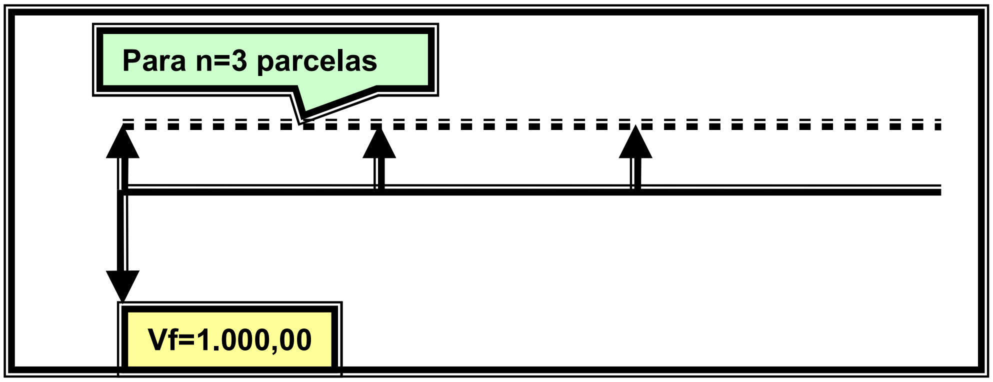


Podemos também calcular o valor dos juros e capital pagos em cada parcela, sem acumulação, através do seguinte método

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
1000,00[CHS][PV] 60 [g] [i] 3[n] [PMT]		Calcula o valor da prestação
1[f][amort]	50,00	Juros na 1ª Parcela
[R↓]	317,21	Capital pago na 1ª Parcela
1[f][amort]	34,14	Juros na 2ª Parcela
[R↓]	333,07	Capital pago na 2ª Parcela
1[f][amort]	17,49	Juros na 3ª Parcela
[R↓]	349,72	Capital pago na 3ª Parcela

Exemplo 2: Ao efetuar a aquisição de um bem de consumo no valor de R$1.000,00, você concordou em pagar 3 prestações com entrada considerando uma taxa de juros anual de 60%. Calcule o valor da prestação mensal fixa.

Solução: Vamos primeiramente visualizar a operação através do gráfico:



Como podemos observar, os valores dos pagamentos e os períodos devem ser rigorosamente iguais. A fórmula a ser usada nesta situação é a seguinte:

$$P = \frac{Vfxi}{\{[1-(1+i)^{-n}][1+i]\}} = \frac{1.000{,}00x\frac{5}{100}}{\{[1-(1+\frac{5}{100})^{-3}][1+\frac{5}{100}]\}} = 349{,}72$$

Portanto, efetuaremos 3 pagamentos iguais de R$349,72. Este tipo de série é mais conhecido como Sistema Price de Financiamento com entrada, e se trata de uma Série Uniforme de Pagamento Antecipada.

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
g[BEG]	BEGIN	Informa que a série é antecipada
1.000,00[CHS][PV]	-1.000,00	Introduz o valor financiado
60 [g] [i]	5	Introduz a taxa de juros periódica
3[n]	3	Introduz a quantidade de parcelas
[PMT]	349,72	Calcula o valor da parcela
g[END]	Retorna a máquina para a situação de série postecipada.	

Porém, observe que, na prática, ao efetuar a primeira parcela no ato da realização da operação financeira, você pode considerar este valor como uma entrada, abatendo desta maneira o saldo devedor a ser financiado. Assim, se deduzirmos do valor financiado de R$1.000,00 a parcela de R$349,72, teremos um novo saldo devedor de R$650,28. Calculando para a nova série, teremos

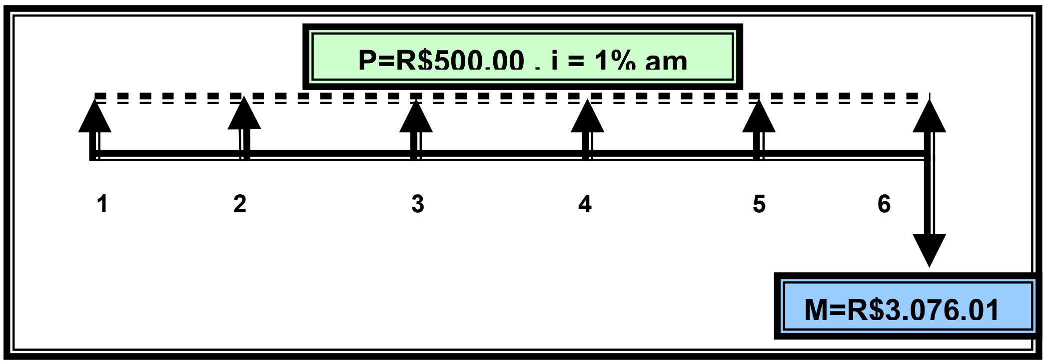
$$P = \frac{650{,}28\ x\ \frac{5}{100}}{[1-(1+\frac{5}{100})^{-2}]} = 349{,}72$$

Utilizando a calculadora ***hp*12C**

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
650,28[CHS][PV]	- 650,28	Introduz o valor financiado
60 [g] [i]	5	Introduz a taxa de juros periódica
2[n]	2	Introduz a quantidade de parcelas
[PMT]	349,72	Calcula o valor da parcela

Exemplo 3: Ao efetuar depósitos mensais de R$500,00 em uma aplicação financeira, com rendimentos previstos de 1%a.m. e capitalização mensal, você deseja saber ao final do 5º mês qual será o valor atualizado.

Solução: Pela sistemática das aplicações financeiras, temos aqui a situação de uma Série Uniforme de Depósitos Postecipada, ou seja, os rendimentos serão creditados sempre ao final do período.



A fórmula utilizada é a seguinte, ressaltando que no 6º mês o depósito não é capitalizado por ser uma Série Postecipada:

$$M = \frac{Px[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Aplicando os dados, teremos:

$$M = \frac{Px[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{500{,}00x[(1+\frac{1}{100})^6 - 1]}{\frac{1}{100}} = 3.076{,}01$$

Utilizando a calculadora

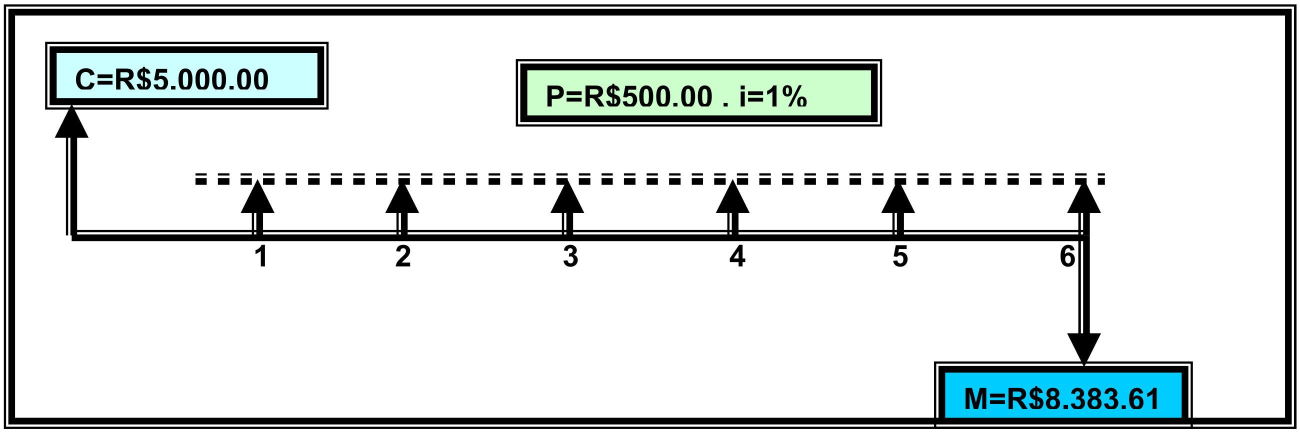
TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
500,00[CHS][PV]	- 500,00	Introduz o valor do 1º depósito
500[CHS][PMT]	- 500,00	Introduz o valor dos depósitos mensais
5[n]	5	Introduz a quantidade de depósitos mensais
1[i]	1	Introduz a taxa de juros.
[FV]	3.076,01	Calcula o valor final.

Desafio : que tal resolver este problema sem utilizar a tecla [PV] ?

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
[n]		Introduz a quantidade de depósitos mensais
1[i]	1	Introduz a taxa de juros.
[FV]	3.076,01	Calcula o valor final.

Exemplo 4: Ao efetuar um depósito inicial de R$5.000,00 e mais 6 depósitos mensais de R$500,00 em uma aplicação financeira, com rendimentos previstos de 1% a.m. e capitalização mensal, você deseja saber ao final do 6º mês qual será o valor atualizado.

Solução: Como podemos observar através do gráfico abaixo, a nossa série de depósitos não é uniforme, porém os rendimentos serão creditados sempre ao final do período.



Desta forma, podemos dividir a solução em duas etapas.

- **Primeira etapa:** Considerando os 6 depósitos iguais, do 2º ao 7º depósito, voltaremos a situação do exemplo 2, onde obtemos o valor de R$3.076,01.
- **Segunda etapa:** Considerando o valor de R$5.000,00, sendo capitalizado durante 6 meses, teremos através da fórmula do montante composto:

$$M = C(1+i)^n = 5.000,00(1+\frac{1}{100})^6 = 5.307,60$$

Assim, se somarmos os dois resultados, da 1ª e 2ª etapa ,teremos o valor de R$8.383,61.
Efetuando os cálculos pelo teclado financeiro da ***hp*12C**

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
5.000,00[CHS][PV]	- 5.000,00	Introduz o valor do 1º depósito
500[CHS][PMT]	- 500,00	Introduz o valor dos depósitos mensais
6[n]	6	Introduz a Quantidade de depósitos mensais
1[i]	1	Introduz a taxa de juros.
[FV]	8.383,61	Calcula o valor final.

Exemplo 5: Para que você atinja o valor de R$10.000,00 após 6 meses, partindo de um depósito inicial de R$3.000,00 e supondo uma taxa mensal de 2%, quanto deve ser depositado mensalmente?

- **Primeira etapa:** Considerando o valor de R$3.000,00 sendo capitalizado durante 6 meses, teremos através da fórmula do juro composto:

$$M = C(1+i)^n = 3.000,00(1+\frac{2}{100})^6 = 3.378,49$$

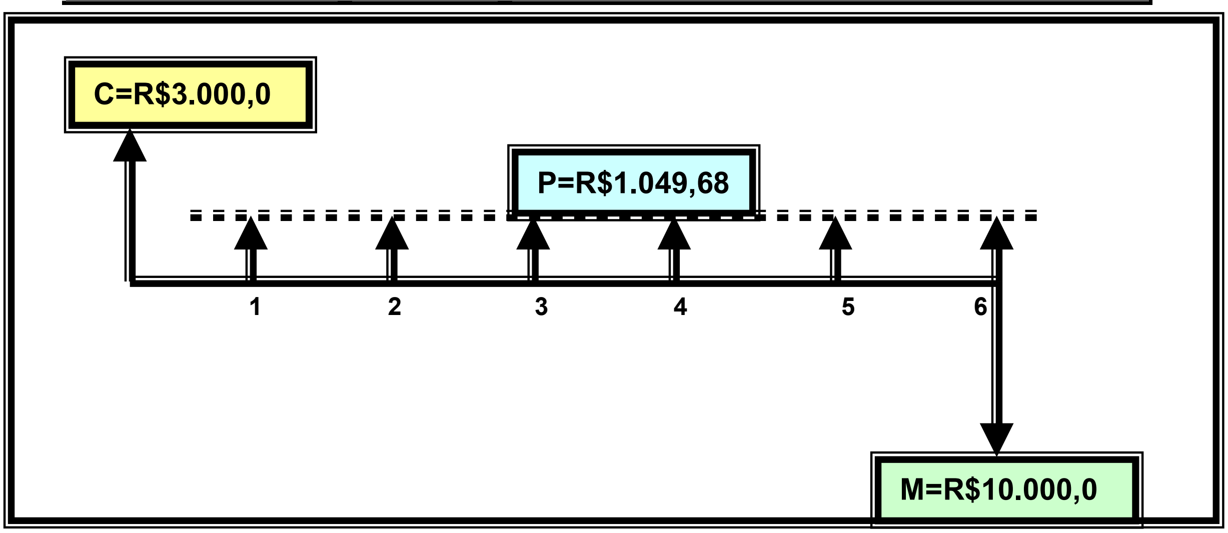
Portanto, faltam R$10.000,00 – R$3.378,49 = R$ 6.621,51 para completar o montante.

- **Segunda etapa:** Considerando os seis depósitos iguais, do 2º ao 7º depósito

$$M = \frac{Px[(1+i)^n - 1]}{i} \Rightarrow P = \frac{Mxi}{[(1+i)^n - 1]} = \frac{6.621{,}51x\frac{2}{100}}{[(1+\frac{2}{100})^6 - 1]} = 1.049,68$$

Portanto, com R$1.049,68 mensais de depósito chegaremos ao montante de R$10.000,00. Veja como efetuar os cálculos na hp12C e o gráfico .

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
3000,00[CHS][PV]	-3.000,00	Introduz o valor do 1º depósito
10.000,00[FV]	10.000,00	Introduz o valor final que desejamos atingir
2[i]	2	Introduz a taxa de juros.
6[n]	6	Introduz a quantidade de parcelas
[PMT]	1.049,68	Calcula o valor do depósito mensal.



TABELAS FINANCEIRAS

Como podemos perceber os cálculos sempre são feitos utilizando calculadoras. Porém, na ausência desta, para facilitar podemos efetuar o uso de tabelas financeiras que minimizam os cálculos e auxiliam no entendimento. Utilizaremos a seguinte nomenclatura: **[i¬n]** que nos fornecem os valores associados de taxa e prazo, com seis casas decimais, e vamos trabalhar com a Série Uniforme de Amortizações (Tabela PRICE).

$$P = \frac{Vfxi}{[1-(1+i)^{-n}]} \Rightarrow Vf = Px\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$[i\neg n] = \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$P = Vfx\ [i\neg n] \Rightarrow Vf = \frac{P}{[i\neg n]}$$

i / n	1,00%	2,00%	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%
1	1,010000	1,020000	1,030000	1,040000	1,050000	1,060000
2	0,507512	0,515050	0,522611	0,530196	0,537805	0,545437
3	0,340022	0,346755	0,353530	0,360349	0,367209	0,374110
4	0,256281	0,262624	0,269027	0,275490	0,282012	0,288591
5	0,206040	0,212158	0,218355	0,224627	0,230975	0,237396
6	0,172548	0,178526	0,184598	0,190762	0,197017	0,203363
7	0,148628	0,154512	0,160506	0,166610	0,172820	0,179135
8	0,130690	0,136510	0,142456	0,148528	0,154722	0,161036
9	0,116740	0,122515	0,128434	0,134493	0,140690	0,147022
10	0,105582	0,111327	0,117231	0,123291	0,129505	0,135868
11	0,096454	0,102178	0,108077	0,114149	0,120389	0,126793
12	0,088849	0,094560	0,100462	0,106552	0,112825	0,119277

Exemplo: Para 5% e 10 parcelas teremos um multiplicador fixo de 0,129505 sobre o valor de capital. Para R$10.000,00, teremos R$1.295,05

Esta tabela pode ser construída facilmente com a utilização da ***hp12c.*** Apenas devemos considerar um valor unitário como o valor principal, e informarmos as taxas e prazos que queremos calcular.

TECLA	VISOR	FUNÇÃO
1[CHS][PV]	-1	Valor Principal
10[n]	10	Prazo (períodos)
5[i]	5	Taxa de Juros
[PMT]f[6]	0,129505	Multiplicador fixo

O CONCEITO DO VALOR FINANCEIRO NO TEMPO

1. ***Capitalização:*** regime de remuneração que incorpora ao valor inicial de capital os valores resultantes das taxas de juros incidentes.

2. ***Valor Principal PV:*** o valor inicial de uma série financeira.

3. ***Valor Futuro FV:*** o valor resultante da aplicação de encargos financeiros (taxas de juros) sobre o valor inicial.

4. ***Período:*** intervalo ocorrido entre duas datas consideradas para a aplicação de uma taxa de juros.

5. ***Taxa Real:*** a taxa de juros nominal descontada a inflação. É calculada da seguinte forma:

$$\textbf{Taxa Real(\%)} = \left[\frac{(1+\dfrac{\textbf{Taxa Nominal(\%)}}{100})}{(1+\dfrac{\textbf{Taxa da Inflação(\%)}}{100})} - 1\right]\textbf{x100} \Rightarrow (1+i_R)x(1+i_I) = (1+i_N)$$

Exemplo: Um empréstimo teve uma taxa de juros mensal de 5%. Sabendo que a inflação neste período foi de 3%, qual o valor real da taxa de juros?

$$Taxa\ Real = \left[\frac{(1+\dfrac{5}{100})}{(1+\dfrac{3}{100})} - 1\right]x100 = 1{,}9417\%$$

SÉRIES NÃO UNIFORMES DE PAGAMENTO

Este tipo de série financeira é a mais utilizada no campo dos financiamentos e estudo de viabilidade econômica, constituindo-se em um poderoso instrumento de análise financeira. As duas metodologias mais importante são o VPL e a TIR, que serão objeto de nosso estudo. Pela complexidade dos cálculos matemáticos, torna-se de suma importância a utilização de instrumentos como a calculadora hp12c e planilhas eletrônicas. Nos exemplos seguintes, vamos indicar as soluções utilizando destes recursos.

VALOR PRESENTE LÍQUIDO – NPV

Ao considerarmos uma sucessão de pagamentos ou recebimentos, com prazo pré-determinado, períodos iguais e valores não constantes, e desejarmos conhecer o seu valor líquido ao início da série, temos o conceito conhecido como Valor Presente Líquido. Utilizaremos de exemplos para introduzir os conceitos e as fórmulas, por julgarmos mais prática a compreensão desta forma.

TAXA INTERNA DE RETORNO – TIR

A Taxa Interna de Retorno (TIR) é o valor de taxa que efetua o “zeramento” do Valor Presente Líquido (NPV), ou seja, fornece o ponto de equilíbrio da operação financeira. Na prática, o cálculo é feito estimando-se um valor de taxa repetidamente até encontrar-se a que efetue o “zeramento” do NPV, pois não há como isolar-se a variável taxa na função que calcula o NPV. Por isto, normalmente estes cálculos são efetuados unicamente com o auxílio de planilhas ou calculadoras financeiras. No nosso caso, vamos efetuar o estudo com a calculadora ***hp12c*** e orientar como efetuar o cálculo em Planilha Eletrônica Excel., o que nos fornece uma grande versatilidade.

- Com a calculadora ***hp12c :***

Importante :Como podemos perceber, os recursos até aqui utilizados não seriam ideais para a solução do problema, pois previam valores e períodos constantes. Portanto, vamos utilizar um novo modelo na nossa calculadora, em que os períodos são constantes e os valores não. Para isto, vamos utilizar as seguintes teclas financeiras:

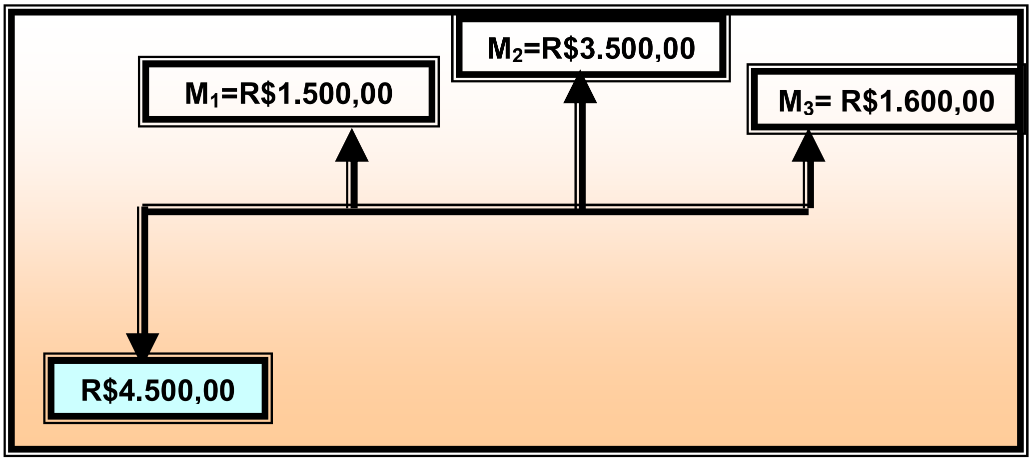
TECLA	FUNÇÃO
[g][Cfo]	**Valor de capital considerado.**
[g][CFj]	**Valor das parcelas consideradas para os períodos subsequentes.**
[g][Nj]	**Tecla auxiliar para informar a seqüência de valores iguais de [CFj].**
f[IRR]	**Calcula a Taxa Interna de Retorno (O valor de taxa que “zera” o V.P.L.)**
f[NPV]	**Calcula o Valor Presente Líquido (V.P.L.)**

- Com Planilha Eletrônica Excel :

Função Financeira : VPL =[(Taxa;V1:Vn)+ Vo]

- Taxa é a taxa de desconto sobre o intervalo de um período.
- V1 a Vn são os valores que representam as entradas e as saídas .
- Vo é o valor inicial da série

·**Exemplo 1**: Ao efetuar o balanço trimestral das vendas de um estabelecimento comercial, você foi informado que a compra do estoque custou R$4.500,00. As vendas mensais estão representadas no gráfico abaixo. Se o custo financeiro for de 5%a.m., verifique se houve lucro ou prejuízo, considerando que todo o estoque foi vendido.



Para que possamos resolver o problema, devemos retornar os valores como uma série de descontos racionais, que possuem a taxa de juros efetiva. Sabemos que:

$$Mr = Vr(1+i)^n \Rightarrow Vr = \frac{Mr}{(1+i)^n} \Rightarrow NPV = Vo + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Mr}{(1+i)^n}$$

Substituindo, teremos:

$$NPV = -Vo + V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$

$$NPV = -4.500,00 + \frac{1.500,00}{(1+0,05)} + \frac{3.500,00}{(1+0,05)^2} + \frac{1.600,00}{(1+0,05)^3} = 1.485,31$$

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
4500,00[CHS] [g][Cfo]	-4.500,00	Informa o valor inicial
1.500,00[g][CFj]	1.500,00	Informa a venda do 1º mês
3.500,00[g][CFj]	3.500,00	Informa a venda do 2º mês
1.600,00[g][CFj]	1.600,00	Informa a venda do 3º mês
f[IRR]	21,47	Valor de taxa periódica que zera o VPL.
5 [i]	5	Informa a taxa periódica
f[NPV]	1.485,31	Calcula o Valor Presente Líquido

Exemplo 2 – Se alteramos a ordem dos valores referentes ao exemplo anterior para R$1.500,00, R$1.600,00 e R$3.500,00, qual será o resultado?

$$NPV = -Vo + V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$

$$NPV = -4.500{,}00 + \frac{1.500{,}00}{(1+0{,}05)} + \frac{1.600{,}00}{(1+0{,}05)^2} + \frac{3.500{,}00}{(1+0{,}05)^3} = 1.403{,}25$$

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
4.500,00[CHS] [g][Cfo]	-4.500,00	Informa o valor inicial
1.500,00[g][CFj]	1.500,00	Informa a venda do 1º mês
1.600,00[g][CFj]	1.600,00	Informa a venda do 2º mês
3.500,00[g][CFj]	3.500,00	Informa a venda do 3º mês
f[IRR]	18,60	Valor de taxa periódica que zera o VPL.
5 [i]	5	Informa a taxa periódica
f[NPV]	1.403,25	Calcula o Valor Presente Líquido

Exemplo 3: Ao efetuar a venda de um imóvel, você obteve duas propostas. Considerando que o preço fixado a vista é o mesmo, no valor de R$100.000,00, determine qual é a melhor oferta considerando que a taxa de juros anual situa-se em 37% a.a.

3.1 - 1ª Proposta: Três pagamentos anuais e consecutivos de R$47.000,00, R$62.000,00 e R$85.000,00, totalizando o valor nominal de R$194.000,00.

$$NPV = -Vo + V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$

$$NPV = 100.000{,}00 + \frac{47.000{,}00}{(1+0{,}37)} + \frac{62.000{,}00}{(1+0{,}37)^2} + \frac{85.000{,}00}{(1+0{,}37)^3} = 396{,}29$$

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
100000,00[CHS] g][Cfo]	-100.000,00	Informa o valor fixado a vista
47000,00[g][CFj]	47.000,00	Informa o 1º pagamento
62000,00[g][CFj]	62.000,00	Informa o 2º pagamento
85000,00[g][CFj]	85.000,00	Informa o 3º pagamento
f[IRR]	37,27	Taxa periódica que zera o VPL.
37 [i]	37	Informa a taxa periódica anual
f[NPV]	396,29	Calcula o Valor Presente Líquido

Ou seja, além dos R$100.000,00 esta proposta oferecerá mais R$ 396,29

3.2 - 2ª Proposta: Três pagamentos anuais e consecutivos de R$60.000,00, R$62.000,00 e R$65.000,00, totalizando o valor nominal de R$187.000,00

$$NPV = -Vo + V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$

$$NPV = -100.000{,}00 + \frac{60.000{,}00}{(1+0{,}37)} + \frac{62.000{,}00}{(1+0{,}37)^2} + \frac{65.000{,}00}{(1+0{,}37)^3} = 2.107{,}33$$

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
100.000,00[CHS] [g][Cfo]	-100.000,00	Informa o valor fixado a vista
60.000,00[g][CFj]	60.000,00	Informa o 1º pagamento
62.000,00[g][CFj]	62.000,00	Informa o 2º pagamento
65.000,00[g][CFj]	65.000,00	Informa o 3º pagamento
f[IRR]	38,58	Taxa periódica que zero o VPL
37 [i]	37	Informa a taxa periódica anual
f[NPV]	2.107,33	Calcula o Valor Presente Líquido

Ou seja, além dos R$100.000,00 esta proposta oferecerá mais 2.107,33

Exemplo 4: Calcule o valor do NPV para o exemplo 3.1 se taxa de juros anual for de 40% a.a.

$$NPV = -Vo + V_{R1} + V_{R2} + V_{R3}$$

$$NPV = -100.000{,}00 + \frac{47.000{,}00}{(1+0{,}40)} + \frac{62.000{,}00}{(1+0{,}40)^2} + \frac{85.000{,}00}{(1+0{,}40)^3} = -3.819{,}24$$

TECLA	VISOR	COMENTÁRIO
100.000,00[CHS] [g][Cfo]	-100.000,00	Informa o valor fixado a vista
47.000,00[g][CFj]	47.000,00	Informa o 1º pagamento
62.000,00[g][CFj]	62.000,00	Informa o 2º pagamento
85.000,00[g][CFj]	85.000,00	Informa o 3º pagamento
f[IRR]	37,27	Taxa periódica que zero o VPL
40 [i]	40	Informa a taxa periódica anual
f[NPV]	- 3.819,24	Calcula o Valor Presente Líquido

Ou seja, esta proposta não cobrirá o valor esperado de R$100.000,00, faltando 3.819,24.